MATHEMATICAL SCIENCES

SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS GIVEN BY THE DIRICHLET CONDITION

Rustamova M.,
Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, Department of " Mathematical analysis", National University of Uzbekistan, Tashkent
Safarov R.,
Teacher at Karshi State University
Graduate student, Novosibirsk State University, Novosibirsk
Boboxonova M.
master, National University of Uzbekistan, Tashkent

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ЗАДАННОГО УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Рустамова М.С.
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, доцент, кафедра «Математический анализ», Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, г. Ташкент
Сафаров Р.Ч.
Преподаватель Каршинского Государственного Университета
аспирант, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
Бобохонова М.Б.
магистр, Национальный Университет Узбекистана, г. Ташкент
https://doi.org/10.5281/zenodo.11094540

Abstract
The solution for the equation with p-Laplasion is obtained in the work.
Аннотация
В работе получено решение для уравнения с p-лапласионом.

Keywords: Dirichlet problem, divergence, Laplace operator.
Ключевые слова: задача Дирихле, дивергенция, оператор Лапласа.

Рассмотрим шар B_R из пространство R^n, где B_R −шар радиуса R, ∂B_R − его граница.
Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u=0 \text{ на } \partial B_R \tag{2}$$

Уравнение (1) является нелинейным выраждающимся дифференциальным уравнением . Пусть p=3 , f(x)=4 |x|

Определение. Дивергенция вектора F=($F_1, F_2, \dots \dots \dots F_n$) равна следующему выражению

$$\mathrm{div}\, F = F_{1\,x_1} + F_{2\,x_2} + \cdots \dots \dots . F_{n\,x_n}.$$

Нас интересует существование решений задачи (1).
Если мы изменим переменную как r=|x|, где r$\epsilon(0,R)$, то получаем следующее:

1) $f(x) = 4|x| = 4r$
2) $\mathrm{div}(|\nabla u|\ \nabla u) = div(|\nabla u|(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots \dots u_{x_n}) = |\nabla u|(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots \dots \dots . . + u_{x_nx_n}).$

Используя замену r=|x|=$\sqrt{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \dots \dots \dots . + x_n{}^2}$

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= u_r\, r_{x_1} \\ u_{x_2} &= u_r r_{x_2} \\ &\dots\dots\dots\dots.. \\ &\dots\dots\dots\dots.. \\ u_{x_n} &= u_r\, r_{x_n} \end{aligned} \tag{3}$$

$|\nabla u| = \sqrt{{u_{x_1}}^2 + u^2{}_{x_2} + \ldots\ldots u_{x_n}{}^2}$

$$r_{x_1} = \frac{x_1}{r}$$
$$r_{x_2} = \frac{x_2}{r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{x_n} = \frac{x_n}{r}$$

Используя уравнения (3) и (4) составим следующие уравнения:

$$|\nabla u| = \sqrt{u^2{}_r \; \frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + x_n{}^2}{r^2}} = \sqrt{u^2{}_r \; \frac{r^2}{r^2}} = |u_r|$$

$$u_{x_1x_1} = u_{rr}r^2{}_{x_1} + u_r r_{x_1x_1}$$
$$u_{x_2x_2} = u_{rr}{r_{x_2}}^2 + u_r r_{x_2x_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{x_nx_n} = u_{rr}{r_{x_n}}^2 + u_r r_{x_nx_n}$$

Из уравнений (5) находим следующие результаты :

$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots \ldots + u_{x_nx_n} = u_{rr}\left({r_{x_1}}^2 + r^2{}_{x_2} + \cdots \ldots + {r_{x_n}}^2\right) + u_r\left(r_{x_1x_1} + r_{x_2x_2} + \cdots \ldots + r_{x_nx_n}\right) = u_{rr}\frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + x_n{}^2}{r^2} + u_r\frac{r - x_1r_{x_1} + r - x_2r_{x_2} + \ldots\ldots + r - x_nr_{x_n}}{r^2} = u_{rr} + u_r\frac{nr - \frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + \ldots\ldots + x_n{}^2}{r}}{r^2} = u_{rr} + u_r\frac{nr - r}{r^2} = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r$.

Согласно предыдущему результату приходим к следующему равенству;

-div$(|\nabla u|\nabla u) = -|\nabla u|(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots \ldots + u_{x_nx_n}) = -|u_r|u_{rr} - \frac{n-1}{r}|u_r|u_r$.

Известно, что решение удовлетворяют уравнению

$$-(|u_r|u_r)_r - \frac{n-1}{r}|u_r|u_r = 4r \qquad (6)$$

и граничным условиям

$$u_r(0) = 0, u(R) = 0 \qquad (7)$$

Мы взяли $u_r(0)$=0 такая условия, чтобы второй член была ограничена в точке r=0

Запишем уравнение (6) следующим образом:

$(|u_r|u_r)_r + \frac{n-1}{r}|u_r|u_r = -4r$

Чтобы решить это упрощенное дифференциальное уравнение, мы делаем следующую замену**:**

$$|u_r|\, u_r = z\,, z = z(r),$$

тогда

$z' + \frac{n-1}{r}z = -4r$

$$y' = c(x)y + d(x) \qquad (8)$$

Теорема. Пусть функции $c(x)$ и $d(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы, определенной неравенствами $a < x < b, -\infty < y < \infty$, проходит одна и только одна интегральная линия этого уравнения, определенная при всех x на интервале (a, b).

Доказательство. Разберем прежде всего более простой случай – линейное однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = c(x)y \qquad (9)$$

Это уравнение получается из предыдущего при d$(x)\equiv 0$ и является уравнением с разделяющимся переменными. Поэтому, замечая, $\int_k^y \frac{d\mu}{\mu}$ расходится при y→0, заключаем, что уравнение (9) имеет единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0). Легко видеть, что это решение дается формулой

y(x)=$y_0 exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right]$ (exp a$\equiv e^a$) ,

Вернемся теперь к уравнению (8). Применим так называемый метод вариации постоянной. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathrm{y}(x) = z\; exp\left[\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right] \qquad (10)$$

где z есть некоторая функция от x. Несложными вычислениями можно показать, что для того чтобы (10) было решением уравнения (8), необходимо и достаточно, чтобы функция z(x) была дифференцируема и удовлетворяла уравнению

$\frac{dz}{dx} = d(x)\; exp\left[-\int_{x_0}^x c(\tau)d\tau\right]$.

Для выполнения условия y(x_0)= y_0, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы z(x_0) также равнялось y_0. Поэтому из последнего уравнения находим

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} d(s)\ exp\left[-\int_{x_0}^{x} c(\tau)d\tau\right]\text{ds}.$$

Следовательно, функция

$$\text{y}= z(x)\ exp\left[\int_{x_0}^{x} c(\tau)d\tau\right]= y_0\ exp\left[\int_{x_0}^{x} c(\tau)d\tau\right] + \int_{x_0}^{x} d(s)\ exp\left[\int_{x_0}^{x} c(\tau)d\tau\right]\text{ds}$$

является единственным решением уравнения (8), которое обращается в y_0 при $x = x_0$.

Как известно из курса дифференциальных уравнений , решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$z=e^{-\int\frac{n-1}{r}dr}\left(c_1 - \int 4re^{\int\frac{n-1}{r}dr}\ dr\right) = r^{1-n}\left(c_1 - 4\int r^n\, dr\right)=r^{1-n}\left(c_1 - \frac{4}{n+1}r^{n+1}\right) = c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2$$

значит: $|u_r|u_r = c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2$

a) очевидно $u_r = 0$ не будет решения

b) если $u_r > 0$

$$|u_r|^2 = c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2$$

$$u_r = \sqrt{c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2}$$

в этом случае решение будет равен

$$u=\int \sqrt{c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2}\ dr$$

б) если $u_r < 0$

$$-|u_r|^2 = c_1r^{1-n} - \frac{4}{n+1}r^2$$

$$u_r = -\sqrt{-c_1r^{1-n} + \frac{4}{n+1}r^2}$$

в этом случае решение будет равен

$$u=-\int \sqrt{-c_1r^{1-n} + \frac{4}{n+1}r^2}\ dr.$$

Список литературы:

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд **.** 5-е. М. «Наука»**, 1964.**

2. Терсенов А.С. О достаточных условиях существования радиально-симметричного решения уравнения p-Лапласа // Нелинейный анализ. 2014. В. 95. П. 362-373