

O'quv qo'llanma - "Professional ta'lim (yo'nalishlar bo'yicha)" yo'nalishi bo'yicha "Oliy matematika" fanidan "TIQXMMI" Milliy Tadqiqot Universiteti tomonidan tasdiqlangan fani dasturiga kiritilgan Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari mavzusini o'z ichiga qamrab olgan. O'quv qo'llanmada mavzu bo'yicha ma'ruza uchun nazariy ma'lumotlar, amaliy mashg'ulotlari uchun misol va masalalar yechimi, hamda mustaqil ta'lim uchun Mustaqil yechish uchun misollar bilan to'ldirilgan.

O'quv qo'llanmadan "Oliy matematika" fani o'qitiladigan barcha oliy ta'lim muassasalarining Professional ta'lim (yo'nalishlar bo'yicha) yo'nalishi talabalari va Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlariga qiziquvchilar foydalanishlari mumkin.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2023 yil 22 dekabrda 537-sonli buyrug'i bilan o'quv jarayonida foydalanish va nashr qilishga tavsiya etilgan.

OLIV MATEMATIKA: O'QUV QO'LLANMA

RASULOVA MOXIRA SA'DULLAYEVNA



9 786208 116873

Globe
EDIT

QARSHI - 2024

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIRASI OLIY TA’LIM, FAN VA
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETINING
QARSHI IRRIGATSIYA VA AGROTEXNOLOGIYALAR INSTITUTI**

RASULOVA MOXIRA SA’DULLAYEVNA

OLIV MATEMATIKA:

O‘QUV QO‘LLANMA

QARSHI -2024

M.S.RASULOVA OLIY MATEMATIKA:

O'quv qo'llanma.

O'quv qo'llanma - "Professional ta'lim (yo'nalishlar bo'yicha)" yo'nalishi bo'yicha "Oliy matematika" fanidan "TIQXMMI" Milliy Tadqiqot Universiteti tomonidan tasdiqlangan fani dasturiga kiritilgan Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari mavzusini o'z ichiga qamrab olgan. O'quv qo'llanmada mavzu bo'yicha ma'ruza uchun nazariy ma'lumotlar, amaliy mashg'ulotlari uchun misol va masalalar yechimi, hamda mustaqil ta'lim uchun Mustaqil yechish uchun misollar bilan to'ldirilgan.

O'quv qo'llanmadan "Oliy matematika" fani o'qitiladigan barcha oliy ta'lim muassasalarining Professional ta'lim (yo'nalishlar bo'yicha) yo'nalishi talabalari va Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlariga qiziquvchilar foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar: Sharipov E.O. - Qarsh muxandislik istisodiyot instituti "Oliy matematika" kafedrasi mudiri, pedagogika fanlari falsafa doktori.

Mustofoyeva N.M. - "TIQXMMI" MTUning Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar instituti "Matematika va tabiiy fanlar" kafedrasi dotsenti, f-m. fanlari bo'yicha falsafa doktori.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2023 yil 22 dekabrda 537-sonli buyrug'i bilan o'quv jarayonida foydalanish va nashr qilishga tavsiya etilgan.

@Qarshi, "TIQXMMI" MTUning Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar instituti, 2024.

MUNDARIJA

KIRISH	7
1-mavzu.Oliy matematika fani va uni o‘qitilishidan maqsadlar, vazifalar. Sohaga tegishli sodda masalalarni keltirish. Determinantlar va matritsalar. Determinantlarni hisoblash usullari.....	8
1.1.Oliy matematika fanining predmeti.....	8
1.2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.	8
2-mavzu.Determinantlarning asosiy xossalari. Determinantlarni hisoblash usullari. Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar.	14
2.1 Minor va algebraik to‘ldiruvchilar	14
2.2 Determinantlarning xossalari.....	14
3-mavzu.Matritsalar va ular ustida amallar. Matritsalarini ko‘paytirish, teskari matritsani topish. Matritsalarining amaliy masalalarga tatbig‘i.	19
3.1. Matritsalar ustida amallar.	19
3.2. Matritsaning rangi va uni hisoblash.....	22
3.3. Teskari matritsa va uni topish.....	23
4-mavzu.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Kramer usuli. Gauss usuli. Bir jinsli tenglamalar sistemasi.	26
4.1.ChTS haqida umumiy tushunchalar.	26
4.2.Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.....	26
4.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.	32
4.4.Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.....	33
5-mavzu.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish. Matritsalar va tenglamalar sistemasining iqtisodiy masalalarga tatbiqlari.	36
5.1 Matrisaviy usulda yechish.	36
6-mavzu.Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi tushunchasi. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. Uchburchak yuzini topish.	39
6.1.Koordinatlar usuli va sodda masalalar.....	39
7-mavzu.To‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bissektisa tenglamalari. Analitik geometriyaning sodda masalalari.	43
7.1 To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari.	43
8-mavzu.Vektorlar va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi va komponentalari. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va ularning asosiy xossalari.	49
9-mavzu.Vektorlar va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi va komponentalari. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va ularning asosiy xossalari.	52
10-mavzu.Vektorlarning vektor ko‘paytmasi, aralash ko‘paytmasi va ularning xossalari. Vektorlarning geodezik masalalarga tatbiqlari.	55
11-mavzu.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: aylana, ellips – ularning kanonik tenglamasi va asosiy elementlari.	58
12-mavzu.Giperbola va parabola – ularning kanonik tenglamasi va asosiy elementlari.....	63
13-mavzu.Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning mexanik konstruksiyalarga tatbiqlari.	69
13.1.Dekart koordinatlarini almashtirish.	69
14-mavzu.Tekislik tenglamalari,ularning xususiy hollari.Tekislikni yasash.Tekisliklar orasidagi burchak.	75
15-mavzu.Fazoda to‘g‘ri chiziq va uning parametrlri va kanonik tenglamalari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziq va tekislikning fazoda o‘zaro joylashishi	84
16-mavzu.Silindrik sirtlar, sfera, ellipsoid, giperboloid va paraboloidlar. Analitik geometriyaning konstruktiv masalalarga tatbiqlari	91
17-mavzu.O‘zgaruvchi va o‘zgarmas miqdorlar. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari, aniqlanish sohasi, grafigi. Elementar funksiyalar, murakkab funksiya. Ketma-ketlik va uning limiti.....	100
18-mavzu.Funksiya limiti,bir tomonlama limitlar. Funksiyaning uzluksizligi	113

19-mavzu.Limitlarning asosiy xossalari. Aniqmasliklar va ularni ochish. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiya limitining tatbiqlari.	120
19.1.Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari.....	120
20-mavzu.Funksiya hosilasi va uning tatbiqlari. Bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari. Funksiyaning grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari. Murakkab, parametrik, teskari va oshkormas funksiyalarning hosilasi, hosilani hisoblash qoidalari, hosilalar jadvali.	126
21-mavzu.Elementar funksiyalarning hosilalari. Yuqori tartibli hosilalar, funksiyaning differensial. Funksiya differensialining taqribiy xisoblashga tatbig'i. Hosila va differensialning muhandislik masalalariga tatbiqlari.	134
21.1.Yuqori tartibli hosila va differentsiallar	134
22-mavzu.Funksiyaning ekstremumi. Funktsiyaning eng kata va eng kichik qiymatlarini topish va grafiklarini chizish.....	139
22.1.Funksiyaning monotonligini aniqlashda hosilaning tatbiqi.....	139
23-mavzu.Boshlang'ich funksiya. Aniqmas integral. Aniqmas integrallar jadvali. Integrallashning uchta asosiy usullari (yoyish, o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash).	154
24-mavzu.Kvadrat uchhad qatnashgan ba'zi funksiyalarni integrallash. Rasional kasrlarni integrallash. ..	165
25-mavzu. Trigonometrik va irratsional funksiyalarni integrallash.	174
26-mavzu.Aniq integral. Quyi va yuqori integral yig'indilar. Aniq integral va uning asosiy xossalari. Aniq integralni hisoblash.....	181
27-mavzu.Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish va Bo'laklab integrallash.Xosmas integrallar.	186
28-mavzu.Aniq integralning geometrik tatbiqlari. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi.	192
29-mavzu.Ko'p o'zgaruvchili funksiya funksiya tushunchasi. Xususiy hosila va to'la differensial.....	199
30-mavzu.Fazodaegri chiziqqa o'tkazilgan urinma tekislik va normalni aniqlash. Yo'nalish bo'yicha hosila.Gradient.Divergensiya.Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning tadbiqlari.....	211
31-mavzu.Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari. : Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning eng kata va eng kichik qiymatlari.	223
32-mavzu.Oddiy differensial tenglamalar.Koshi masalasi. o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.	232
33-mavzu.Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va To'la differensialli tenglamalar	235
34-mavzu.To'la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko'paytuvchi.	238
35-mavzu.Yuqori tartibli differensial tenglamalar.Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar.	242
36-mavzu.Yuqori tartibli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.	247
37-mavzu.Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar.	253
38-mavzu.Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.Differensial tenglamalarning tabiiy mexanik jarayonlarnimatematik modellarini tuzishdagi ahamiyati.	261
39-mavzu.Sonli qatorning umumiy hadi.Xususiy yig'indisi,qatorning yaqinlashish va uzoqlashishi. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.	270
40-mavzu.Qator yaqinlashishining integral alomati. Ishoralari almashinuvchi qatorlar Leybnis teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashish.....	273
41-mavzu.Funksional va darajali qatorlar.	277
42-mavzu.Teylor va Makloren qatorlari. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish.	279
43-mavzu.Davri 2I bo'lgan funksiyalar uchun Fur'e qatorlari. Fur'e qatorlarining tadbiqlari.	287
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	291

KIRISH

Mustaqillik yillarida mamlakatimizda 2020 yil 23 sentabrda “Ta’lim to’g’risida”gi qonunning yangi tahririning qabul qilinishi, “Kadrlar tayyorlash Milliy dasturining yaratilishi va ta’lim standartlarining ishlab chiqilishi ta’lim tizimini isloh qilish yuzasidan amalga oshirilgan ko’p sonli ishlardan dalolatdir. Shu bilan birga, Iqtisodiy va texnikaviy ko’rsatgichlar, ular ustida olib borilayotgan kuzatuv natijalarini bir tizimda shakllantirish, ularga ta’sir etuvchi omillarning o’zaro bog’liqligini aniqlashda zamonaviy matematik usullar va modellardan foydalanishning o’rni beqiyosdir. Shuning uchun ham, zamonaviy kadrlar tayyorlash borasida mamlakatimizning oliy o’quv yurtlaridagi o’quv jarayonini tashkil etishda amaliy ahamiyatga ega bo’lgan “Oliy matematika” faniga ham alohida e’tibor berilmoqda.

Ushbu o’quv qo’llanma davlatimizning texnik oliy o’quv yurtlaridagi “Professional ta’lim (yo’nalishlar bo’yicha)” ta’lim yo’nalishlari bo’yicha ta’lim olayotgan bakalavrlar uchun mo’ljallangan bo’lib, u tabiiy jarayonlarga matematikani tatbiq qiluvchi ilmiy izlanuvchilar uchun ham foydalidir.

Bozor iqtisodiyoti sharoitida mamlakatimizda amalga oshirilayotgan tub islohatlar ta’sirida milliy iqtisodiyotni yaxlit bir tizim sifatida qarab chiqish, uning mutanosib va yuqori sur’atlarda rivojlanishini, to’lov balansining barqarorligini ta’minlash borasidagi masalalarining mazmun va mohiyatini mukammal o’rgatish “Oliy matematika” fanining asosiy maqsadlaridan biridir.

Talabalarga mazkur fanning xususiyati doirasida mamlakatimizning iqtisodiy holati va rivojlanishini ifodalovchi umumlashgan iqtisodiy ko’rsatkichlarni hisoblashda bo’lajak kadrlar kelgusi faoliyatida samarali foydalanishlari hamda ijodiy yondashuvlarni ta’minlash fanni o’rganish oldida turgan asosiy vazifalaridan biridir.

Ushbu o’quv qo’llanmadan “Iqtisodchilar uchun matematika” fani o’qitiladigan barcha yo’nalish talabalari va unga qiziquvchilar foydalanishi mumkin. O’quv qo’llanmada yo’l qo’yilgan kamchiliklar, noaniqliklar bo’lishi mumkin. Ular bo’yicha qilingan taklif va maslahatlarni mualliflar minnatdorlik bilan qabul qiladilar. O’quv qo’llanma mualliflari taqrizchilarga va uni nashrga tayyorlashga ko’maklashgan barcha hamkasblarga chuqur minnatdorchilik izhor qiladilar.

**1-mavzu.Oliy matematika fani va uni o'qitilishidan maqsadlar, vazifalar.
Sohaga tegishli sodda masalalarni keltirish. Determinantlar va matritsalar.
Determinantlarni hisoblash usullari.**

1.1.Oliy matematika fanining predmeti.

Oliy matematika fani iqtisodiyotda zarur bo'lgan matematikaning: chiziqli algebra, analitik geometriya elementlari, matematik analiz va oddiy differensial tenglamalar nazariyasining boshlang'ich tushunchalarini o'z ichiga olgan bo'limlaridan tashkil topgan. Aynan shu bo'limlar va ularning iqtisodiy tatbiqlari tavsiya etilayotgan o'quv dasturiga kiritilgan. Fanning maqsad va vazifalari Oliy matematika fanini o'qitishdan asosiy maqsadi – iqtisodiy bilimni chqur egallash uchun zarur bo'lgan asosiy matematik tushunchalarni, qonuniyatlarni va bilimlarni talabalarda shakllantirishdir. Fanning vazifasi – uni o'rganuvchilarga: chiziqli algebra va analitik geometriya asoslari; o'zgaruvchi miqdorni, birinchi navbatda funksiyani tekshirishning fundamental usullari (tabiat qonunlari, texnika va iqtisodiyotning turli jarayonlari funksiya orqali ifodalanadi); funksiyani tekshirishning asosini tashkil etuvchi va cheksiz kichik miqdorlar tahliliga tayangan differensial va integral hisob; tabiat qonunlarini, texnika va iqtisodiyot jarayonlari matematik modelini tuzishda nazariy fundamental ahamiyatga ega bo'lgan differensial tenglamalar nazariyasining boshlang'ich tushunchalari bilan tanishtirishdan iborat. Fan bo'yicha talabalarining tasavvur, bilim, ko'nikma va malakalariga qo'yiladigan talablar Oliy matematika fanini o'rganish jarayonida bakalavr: matritsalar, determinantlar, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi; chiziqli va Evklid fazolari, kvadratik formalar; to'g'ri chiziq va tekislik, ikkinchi tartibli egri chiziqlar; differensial va integral hisob, differensial tenglamalar va qatorlar haqida tasavvurga ega bo'lishi; matritsalar va determinantlar ustida bajariladigan amallarni; chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimlarini topishni; kvadratik formalarni tekshirishni; to'g'ri chiziq va tekislik, ikkinchi tartibli egri chiziqlarni yasashni; differensial va integral hisobni; differensial tenglamalarning yechimlarini topishni; qatorlarni yaqinlashishga tekshirishni bilishi va ulardan foydalana olishi; matritsalar va determinantlar ustida amallarni bajarish; chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimlarini topish; kvadratik formalarni tekshirish; to'g'ri chiziq va tekislik, ikkinchi tartibli egri chiziqlarni yasash; differensial va integral hisobni bajarish; differensial tenglamalarning yechimlarini topish; qatorlarni yaqinlashishga tekshirish ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak; sodda iqtisodiy jarayonlarini matematik tahlil qilish va modellashtirish malakalariga ega bo'lishi kerak.

1.2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Determinantlarni hisoblashga keltiriladigan ushbu masalani qaraylik. Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bitta A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlikda berilgan bo'lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun xom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorini ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo'lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilish mumkin. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Biz yuqorida eng oddiy iqtisodiy masalani qaradik, hamda uning modeli ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirilishini ko'rsatdik. Fan va texnikaning juda ko'p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi. Bu holatlar chiziqli tenglamalar nazariyasini umumiy holda qarashimiz lozimligini ko'rsatadi.

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

yechimga ega bo'ladi. (2) formuladagi sur'at va maxrajdagi ifodalar 2-tartibli determinant (aniklovchi) lar deyiladi. 2-tartibli determinantni

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{bilan belgilanadi. } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \text{ larga}$$

determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

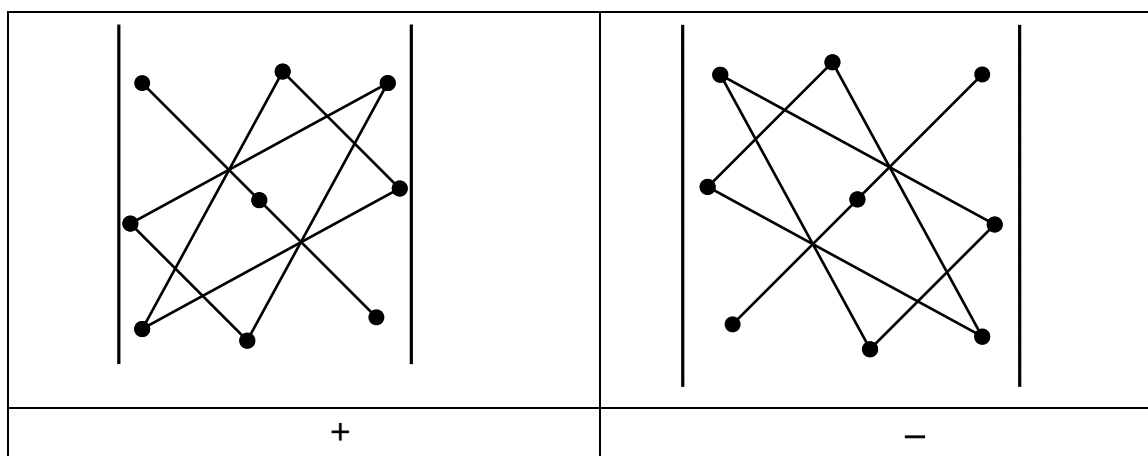
$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (4)$$

ifodaga **3- tartibli determinant deyiladi** va $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ bilan belgilanadi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar **bosh diagonalni**, a_{13}, a_{22}, a_{31} **yordamchi diagonalni** ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left. \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

bo'ladi. (5) formulani esda saqlash **uchun uchburchak qoidasidan** foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema xosil bo'ladi :



(+) ishora bilan,

(-) ishora bilan olinadi.

1-misol. $\Delta = \begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20537 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. Bu determinantni uchburchak qoidasi bilan hisoblash ko'p xonali sonlar bo'lganligi uchun ancha noqulayliklarga olib keladi. Shuning uchun bu determinantni hisoblash uchun, uning xossalaridan foydalanishga urinamiz. Ikkinchi satr elementlarini -2 ga ko'paytirib 1-satr mos elementlariga qo'shamiz, bu holda ushbu determinant hosil bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix};$$

hosil bo'lgan determinantni 1- satr elementlari bo'yicha yoyib,ushbuni

$$\Delta = 0 \cdot \begin{vmatrix} 8268 & 10268 \\ 689 & 126 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 10268 \\ 513 & 126 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix}$$

olamiz.Oxirgi determinant 2-satr elementlarini (-12) ga ko‘paytirib 1-satr mos elementlariga qo‘shib ushbu natijaga ega bo‘lamiz:

$$-12 \begin{vmatrix} 6157 & 8268 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 513 & 689 \end{vmatrix} = 1 \cdot 689 - 0 \cdot 513 = 689.$$

Bu misoldan ko‘rinadiki, determinantlarni hisoblashda uning xossalaridan foydalanish ancha qulayliklarga olib keladi.

3 –tartibli determinantni **diagonallar usuli** deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

bo‘ladi.

Matritsalar haqida umumiy tushunchalar.

Sistemalarni modellashtirishda **matritsalar algebrasi** degan tushuncha muhim ahamiyatga ega. Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda kompyuterlarni qo‘llash matritsalar algebrasini qarashga olib keladi. Ishlab chiqarishni rejalashtirish, moddiy ishlab chiqarish orasidagi mavjud bog‘lanishlarni ifodalashda va boshqalarda, ma’lum darajada tartiblangan axborotlar sistemasiga asoslangan bo‘lishi lozim. Bu tartiblangan axborotlar sistemasi muayyan jadvallar ko‘rinishida ifodalangan bo‘ladi. Misol o‘rnida moddiy ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi o‘zaro bog‘liqlik axborotlari sistemasini qaraylik. Ishlab chiqarish 5 ta (masalan, mashinasozlik, elektroenergiya, metal, ko‘mir, rezina ishlab chiqarish sanoatlari) tarmoqdan iborat bo‘lsin. Bunda ular orasidagi o‘zaro bog‘liqlik 1-jadval bilan ifodalansin.

1-jadval.

Tarmoqlar	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Bu jadvalda a_{ij} ($i, j = 1,2,3,4,5$) lar bilan, i -tarmoqning j - tarmoqqa yetkazib beradigan (tahminlaydigan) mahsuloti miqdori belgilangan, chunonchi, $a_{21}, a_{22}, …,$

a_{25} lar 2-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga; $a_{31}, a_{32}, \dots, a_{35}$ lar esa 3-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga yetkazib beradigan mahsulotlari miqdorini bildiradi. a_{22}, a_{33} lar mos ravishda 2, 3-tarmoqlarning o'z ehtiyojlariga sarfini ifodalaydi.

Yuqoridagiga o'xshash ishlab chiqarish mezonini (normasi) axborotlari sistemasiga sonli misol qaraylik. Korxona 3 turdagi xom ashyo ishlatib 4 xildagi mahsulot ishlab chiqaradigan bo'lsin, bunda xom ashyo sarfi normasi sistemasi 2-jadval bilan berilgan bo'lsin.

2-jadval.

Xom ashyolar	Mahsulotlar			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-jadvalda masalan, 1-turdagi xom ashyo sarfi normasi mos ravishda 1,2,3,4-xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish uchun 2,3,2,0 bo'ladi.

1 va 2 jadvallar, matematikada o'rganiladigan matritsalar tushunchasining misollari bo'laoladi. Matritsalar iqtisodiy izlanishlarda keng qo'llanilmoqda, xususan, ulardan foydalanish ishlab chiqarishni rejalashtirishni osonlashtirib, mehnat sarfini kamaytiradi, hamda rejaning har xil variantlarini tuzishni ixchamlashtiradi. Bundan tashqari har xil iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi bog'liqlikni tekshirishni osonlashtiradi. Bu holatlar matritsalarini umumiy holda qarashga olib keladi.

1-ta'rif. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ o'lchamli matritsa deyiladi. A matritsani qisqacha (a_{ij}) ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) bilan ham belgilash mumkin. Matritsalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsalar **kvadrat matritsa** deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matritsa uchun uning elementlaridan tuzilgan determinantni hisoblash mumkin, bu determinantga A matritsaning determinanti deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ bilan belgilanadi. $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsaga maxsus matritsa, $\det A \neq 0$ bo'lsa, maxsusmas matritsa deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonalini bosh diagonal, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonalini yordamchi diagonal deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0 dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matritsa diagonal matritsa deyiladi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa diagonal matritsadir. Diagonalda barcha elementlari 1 ga teng diagonal matritsa **birlik matritsa** deyiladi va

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

bilan belgilanadi.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14})$ matritsaga satr matritsa deyiladi.

Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matritsaga ustun matritsa deb ataladi.

Barcha elementlari 0 lardan iborat bo'lgan matritsaga no'l matritsa deyiladi va O bilan belgilanadi.

A matritsaga quyidagi matritsani mos qo'yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning har bir satri A matritsaning unga mos ustunidan iborat. A^T matritsani A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1m}, j = \overline{1n}$) matritsalarining mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo'lsa, bunday matritsalar teng deyiladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlarni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Quyidagi determinantlarni nollar eng ko'p bo'lgan satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Quyidagi determinantlarni hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

2-mavzu. Determinantlarning asosiy xossalari. Determinantlarni hisoblash usullari. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.

2.1 Minor va algebraik to'ldiruvchilar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ determinantda } i - \text{ satrni va } j - \text{ ustunni o'chirishdan 2- tartibli}$$

determinant hosil bo'ladi, bunga a_{ij} elementga mos **minor** deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

a_{ij} **elementning algebraik to'ldiruvchisi** deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi, bunda $i + j$ juft bo'lsa, musbat ishora bilan, $i + j$ toq bo'lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi va boshqalar.

2.2 Determinantlarning xossalari.

Determinantlar quyidagi xossalarga ega:

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirilsa uning kattaligi o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 - 0 - 0 + 4 - 0 = 22$ bo'lib, bu determinantda barcha

satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 6 + 0 - 0 + 4 - 0 = 22 \text{ bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkala holda ham}$$

bir xil kattalik hosil bo'ldi, bu birinchi xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

2. Ikkita satr (ustun)ni o'zaro almashtirilsa determinant kattaligining ishorasi teskarisiga o'zgaradi; haqiqatan ham 1- misoldagi determinantda 1-satrini 3-satri bilan o'zaro almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - 24 - 0 + 6 = -28 + 6 = -22$$

bo'lib, bu 2-xossaning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

3. Ikkita bir xil satr (ustun)li determinant kattaligi nolga teng; ikkita satri bir xil bo'lgan determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 0 + 36 - 0 - 0 = 0$$

bo'ladi, bu esa 3-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi

4. Determinantning biror satr (ustun) ning hamma elementlarini $m \neq 0$ songa ko'paytirilsa, uning kattaligi shu m songa ko'payadi.

Haqiqatan ham, 1-xossada keltirilgan determinantning 2-satri elementlarini 2 ga ko'paytirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 12 + 0 - 0 + 8 - 0 = 44$$

bo'lib, bu xossaning ham to'g'riligi ko'rinadi.

5. Determinantning ikkita satri (ustuni) elementlari o'zaro proporsional (mutanosib) bo'lsa, uning kattaligi no'lga teng, misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning 1 va 2-satri elementlari o'zaro proporsional, uni hisoblasak

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 12 - 0 + 6 + 12 = 0$$

bo'lib, bu esa 5-xossaning to'g'riligini ko'rsatadi.

6. Determinantning kattaligi, biror satri (ustuni) elementlarini unga mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganiga teng. 1-xossada keltirilgan misolni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

bu determinantni 3-satr elementlari bo'yicha yoyib yozsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 28 = 22$$

kelib chiqadi, bu esa 6-xossaning ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

7. Determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo‘shiluvchidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant ikkita determinant yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{pmatrix} (a_{11} + b_1) a_{12} a_{13} \\ (a_{21} + b_2) a_{22} a_{23} \\ (a_{31} + b_3) a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ushbu determinantni

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2+2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

keyingi ikkita determinantni hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 3 - 18 + 3 - 0 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 3 + 18 + 1 - 0 = 22;$$

1-xossadagi misoldan ma’lumki, u 22 ga teng edi, keyingi ikki determinant yig‘indisi ham 22 ga teng bo‘ladi, bu esa 7-xossaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

8. Determinantning biror ustuni (satri) elementlariga boshqa ustuni(satri)ning mos elementlarini istalgan umumiy ko‘paytuvchiga ko‘paytirib qo‘shilsa, uning kattaligi o‘zgarmaydi, ya’ni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} + \lambda a_{12}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + \lambda a_{22}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31} + \lambda a_{32}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Misol uchun,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantning 2-ustun elementlarini 2 ga ko‘paytirib, 1-ustunning mos elementlariga qo‘shib, hosil bo‘lgan determinantni hisoblasak:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 6 = 22$$

bo‘ladi. Bu determinantning kattaligi 1- misolda hisoblaganimizdek 22 ga teng edi, bu esa 8-xossaning ham to‘g‘riligini ko‘rsatadi;

3 –tartibli determinantni **diagonal usuli** deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 24 - 6 = 18$$

bo‘ladi.

3. *n*- tartibli determinantlar haqida. Ko‘pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda *n*-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to‘ldiruvchilaridir. Ma’lumki, algebraik to‘ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n - 1)$ bo‘ladi. Determinantlarning hamma xossalari *n*-tartibli determinant uchun ham o‘rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elemenlari bo‘yicha yoysak ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo'lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o'z navbatida 5-tartibli determinantlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko'rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to'g'ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \left[3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] + 3 \cdot \left[(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= 2(-9 + 4 + 16) + 3(2 + 6 - 16) = 22 - 24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida nollar ko'proq bo'lsa, o'sha satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo'yicha yoyganimiz uchun, ya'ni unda 2 ta nol element bo'lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar bo'lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo'ladigan qilib o'zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko'paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo'shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo'lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlarni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Quyidagi determinantlarni nollar eng ko'p bo'lgan satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Quyidagi determinantlarni hisoblang:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

3-mavzu. Matritsalar va ular ustida amallar. Matritsalarini ko'paytirish, teskari matritsani topish. Matritsalarining amaliy masalalarga tatbig'i.

3.1. Matritsalar ustida amallar.

Matritsalarini qo'shish, songa ko'paytirish va bir-biriga ko'paytirish mumkin.

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ ($i = \overline{1m}, j = \overline{1n}$) matritsalarining yig'indisi deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ravishda aniqlanadigan uchinchi $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi. Ravshanki, C matritsaning o'lchami oldingi matritsalarining o'lchami bilan bir xil bo'ladi. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar yig'indisi

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = C$$

bo'ladi. Matritsalarini qo'shish amali quyidagi o'rin almashtirish va guruhlash xossalriga ega, ya'ni

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Matritsalarini qo'shishda biror matritsaga O matritsani qo'shish odatdagi sonlarni qo'shishdagi nol soni rolini o'ynaydi, ya'ni

$$A + O = A.$$

masalan,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A matritsani λ songa ko'paytirish deb uning hamma elementlarini shu songa ko'paytirishga aytiladi, ya'ni

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

masalan,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsani $\lambda = 3$ ga ko'paytirsak,

$$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$m \cdot k$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ matritsaning $k \cdot n$ o'lchamli $B = (b_{ij})$ matritsaga, ko'paytmasi deb $m \cdot n$ o'lchamli shunday $C = (c_{ij})$ matritsaga aytiladiki uning c_{ij} elementi A matritsa i -satri elementlarini B matritsa j -ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Matritsalar ko'paytmasi $C = AB$ bilan belgilanadi. Demak, matritsalarini ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchining ustunlari soni, 2- ko'paytuvchining satrlari soniga teng bo'lishi talab qilinadi. Shu sababli, umuman $AB \neq BA$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. A va B

matritsalarini ko'paytirish.

Yechish. Birinchi matritsaning ustunlar soni, ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matritsalarini ko'paytirish mumkin:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 & 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarini ko'paytirish ushbu

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

taqsimot xossasiga ega.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

bo'lsin. Bu holda

$$A \cdot (BC) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & -6 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}.$$

Endi $(AB) \cdot C$ ko'paytirishni bajaramiz:

$$(AB)C = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 14 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 13 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \\ 14 \cdot (-1) + 46 \cdot 0 & 14 \cdot 2 + 46 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -14 & -110 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

xossa o'rinli bo'ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

bo'lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$$(A+B) \cdot C$$

$$(A+B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

hisoblaymiz:

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

O'ng tomoni

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 34 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

bo'ladi.

Shunday qilib

$$(A+B) \cdot C = AC + BC$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Istalgan kvadrat matritsa A ni mos birlik E matritsaga ko'paytirganda

$$AE = EA = A$$

tenglik o'rinli bo'ladi

3.2. Matritsaning rangi va uni hisoblash.

A $m \times n$ o'lchovli matritsada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k, m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo'lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo'lgan k -tartibli determinantga A **matritsaning k -tartibli minori deyiladi.**

Ta'rif. A matritsaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga A **matritsaning rangi** deyiladi. A matritsaning rangi $\text{rang} A$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsa rangini bevosita hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matritsa rangini hisoblash qulayroq.

Matritsada:

- 1) faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o'chirishdan;
- 2) ikkita satr (ustun)ning o'rinlarini almashtirishdan;
- 3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo'shish;

4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o'zgarmaydi. Bu amallarga odatda elementar almashtirishlar deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblang.

Yechish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elementlariga, birinchi satr elementlarini (-2) ga ko'paytirib, uchinchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to'rtinchi satr elementlariga qo'shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matritsada 2-satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shsak quyidagi matritsa hosil bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matritsada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

bo'lib, to'rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. SHunday qilib, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng.

3.3. Teskari matritsa va uni topish.

A kvadrat matritsa uchun $AB = BA = E$ birlik matritsa bo'lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi. Odatda, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkin, masalan,

V.E.Shneyder va boshqalar. «Oliy matematika qisqa kursi» 1tom. T. O'qituvchi. 1985. 407 b.)

A kvadrat matritsa uchun $\det A \neq 0$ bo'lsa, unga teskari bo'lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{matritsaga teskari } A^{-1} \text{ matritsa } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki $\Delta = 2 \neq 0$ ya'ni, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni topish uchun A matritsa hamma elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Teskari matritsani topish

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ formulasiga asosan}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. A^{-1} teskari matritsaning to'g'ri topilganligini

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko'rish mumkin, haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2,5) + 1 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1,5) + 1 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2,5) + 4 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1,5) + 4 \cdot 0,5 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2,5) + 9 \cdot 0,5 & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 + 9 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1,5) + 9 \cdot 0,5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ya'ni, $AA^{-1} = E$ birlik matritsa hosil bo'ladi, bu A^{-1} teskari matritsaning to'g'ri topilganligini isbotlaydi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Ava B matritsalar yig'indisi topilsin.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$;

2. A va B matritsalar ayirmasi topilsin.

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -10 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 7 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. A matritsa va $\gamma \neq 0$ son berilgan. γA matritsa topilsin.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $\gamma = -3$;

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ $\gamma = -2$;

3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, $\gamma = 2$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaga qarama-qarshi matritsa topilsin.

5. Quyida berilgan A va B matritsalar ko'paytmasi topilsin.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Kramer usuli. Gauss usuli.

Bir jinsli tenglamalar sistemasi.

4.1. ChTS haqida umumiy tushunchalar.

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1-darajali) bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi tenglama 3 o'zgaruvchili 3-tartibli chiziqli tenglamalar sistemasi:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\}$$

Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga ma'lum sonlar majmuini qo'yganda, sistemaning hamma tenglamalari ayniyatga aylansa, bunday sonlar majmuiga tenglamalar sistemasining yechimi (ildizi) deyiladi. Bunday sonlar majmui bitta bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lib, bu sistema aniqlangan (tayin, muayyan) deb ataladi va bu tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Birgalikda bo'lgan sistema bittadan ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema aniq bo'lmagan sistema deyiladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo'lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

Tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo'lmasa, bunday sistemaga birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini 0 dan farqli songa ko'paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo'shish bilan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi (bu xossadan kelgusida ko'p foydalaniladi).

4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Huddi shunga o‘xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2-tenglamani a_{11} ga hadma-had ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni qo‘shib ushbu fodalarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y &= b_2a_{11} - b_1a_{21} & (2) \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, & b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \\ b_2a_{11} - b_1a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

bo‘lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(1) va (2) tengliklarni

$$\Delta \cdot x = \Delta_1, \quad \Delta \cdot y = \Delta_2$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo‘lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo‘ladi, yoki determinantlar orqali yozsak:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalarga Kramer formulalari deyiladi, bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Endi sistemaning determinanti 0 ga teng, ya’ni

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \text{yoki} \quad a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$$

bo‘lsin. Bu holda 1-tenglamaning noma’lumlari oldidagi koeffitsientlari 2-tenglamaning noma’lumlari oldidagi koeffitsientlariga proporsionaldir. Haqiqatan,

koeffitsientlardan biri, masalan a_{11} noldan farqli bo'lsin deb $\frac{a_{22}}{a_{11}} = \lambda$ bilan belgilasak, bundan $a_{21} = \lambda a_{11}$ bo'ladi. U holda $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ tenglikdan $a_{11}a_{22} = \lambda a_{11}a_{12}$ bo'lib, $a_{22} = \lambda a_{12}$ kelib chiqadi. Bularni hisobga olib, berilgan sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2 \end{cases} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. bunda ikkita xususiy hol bo'lishi mumkin:

1) ikkala Δ_1 va Δ_2 determinantlar 0 ga teng, ya'ni $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0$, $\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0$ bundan $b_2 = \lambda b_1$, chunki $a_{22} = \lambda a_{12}$.

Bu holda a_{21} , a_{22} , b_2 sonlar a_{11} , a_{12} , b_1 sonlarga proporsional bo'lib, berilgan tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = \lambda b_1 \end{cases}$$

Shunday qilib, sistemaning ikkinchi tenglamasi, birinchi tenglamasidan uning ikkala qismini λ ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi, ya'ni u 1-tenglamaning natijasidir. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'ladi. Masalan, y ga ixtiyoriy qiymatlar berib, x ning tegishli qiymatini

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$$

tenglikdan topamiz.

2) Δ_1 va Δ_2 determinantlardan hech bo'lmaganda bittasi 0 dan farqli, masalan, $\Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$ bo'lsin. U holda $b_2a_{11} \neq b_1a_{21}$ bo'ladi, demak $b_2 \neq \lambda b_1$. Bu holda (3) sistemadan ma'lum bo'ladiki, $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = b_2$ tenglama birinchi $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ tenglamaga qarama-qarshidir. Demak, berilgan sistema yechimga ega emas, ya'ni birgalikda emas.

Endi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema noma'lumlari koeffitsientlaridan ushbu determinantni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bunga (4) **sistemaning determinanti** yoki aniqlovchisi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad (5)$$

yechimga ega bo'radi, bunda

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

(5) formulaga ham ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasidagidek **Kramer formulalari** deyiladi. Kramer formulalari n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasi uchun ham umumlashtiriladi.

Endi misollar qaraymiz:

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Bu sistemaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \neq 0.$$

Demak, berilgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 18 \cdot 3 = 55, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33.$$

$$\text{Shunday qilib, } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{55}{11} = 5, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3.$$

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema determinantini tuzib, uning uchinchi satri elementlarini (-1) ga ko'paytirib, 1 satr mos elementlariga qo'shib, hosil bo'lgan determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Oxirgi 3-tartibli determinantda 1- ustun elementlarini (-2)ga ko‘paytirib 3- ustun mos elementlariga qo‘shib, hamda 3- ustun elementlari bo‘yicha yoyib

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$$

ni hosil qilamiz. $\Delta \neq 1$, demak, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. Endi boshqa determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta x_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

(Bu determinantlarni hisoblab ko‘rishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, Kramer formulalariga asosan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_4 = \frac{4}{1} = 4$$

bo‘ladi.

Topilgan yechimni tenglamalar sistemasiga bevosita qo‘yib uning yechimi ekanligini ko‘ramiz.

3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimini toping.

Yechish. Oldin sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 4 + 18 - 24 - 4 = 0.$$

Sistema determinanti 0 ga teng, bunda ikki hol bo‘lishi mumkin. Tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmasligi yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi mumkin. Buni aniqlash uchun $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ikkinchi va birinchi tenglamalarni solishtirib, ikkinchi tenglama birinchi tenglamadan ikkiga ko'paytirish bilan hosil bo'lganligini ko'ramiz. Demak, berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning birorta noma'lumiga ixtiyoriy qiymatlar berish bilan cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz, masalan,

$x_3 = 1$ bo'lsin, uni oxirgi sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

sistema hosil bo'lib, $x_1 = -\frac{5}{11}$, $x_2 = \frac{18}{11}$ bo'ladi. Bu holda $\left(-\frac{5}{11}, \frac{18}{11}, 1\right)$

yechim hosil bo'ladi. $x_3 = -2$ bo'lsin, buni (6) sistemaga qo'yib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

bundan, $x_1 = \frac{10}{11}$, $x_2 = -\frac{3}{11}$ bo'lib, $\left(\frac{10}{11}, -\frac{3}{11}, -2\right)$ yechimni olamiz.

Shunday qilib, noma'lumlarning biriga ixtiyoriy qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlarni olamiz.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lib, yordamchi determinantlar ham $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ bo'ladi. Bu tenglamalar sistemasi yechimga ega emas, chunki 1-tenglama bilan 3-tenglama o'zaro ziddir, ya'ni 1-tenglamani -3 ga ko'paytirib 3- tenglamaga hadma-had qo'shsak, $0 = -3$ tenglik hosil bo'lib, bu tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lmasligini bildiradi.

4.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko‘p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma’lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko‘rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo‘lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}$ va h.k.

$a_{11} = 0$ bo‘lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffitsientlari orasida noldan farqlilari bo‘lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o‘rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo‘ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma’lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 -noma’lumni yo‘qotamiz. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o‘z o‘rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya’ni ikkinchi tenglamada x_2 noma’lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo‘qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12}x_2 + \alpha'_{13}x_3 = \beta'_1, \\ \alpha'_{22}x_2 + \alpha'_{23}x_3 = \beta'_2, \\ \alpha'_{33}x_3 = \beta'_3 \end{cases} \quad (2)$$

ko‘rinishga keladi. Endi hamma noma’umlarni so‘nggi tenglamadan boshlab teskari qadam bilan topish qoldi.

6-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4 \cdot 6, \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3 \cdot 6 \end{cases}$$

ya'ni

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ 7x_2 - 8x_3 &= -15 \\ -x_2 - 7x_3 &= -8 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi.

Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o'z o'rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo'lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7}, \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7}. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1$, $x_2 = 1$ bo'ladi. $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak $x_1 = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

- 1) sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;
- 2) sistema **birgalikda va aniqmas bo'lsa**, bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi;
- 3) sistema **birgalikda bo'lmasa**, u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo'qotilayotgan) noma'lum bilan birgalikda qolgan barcha noma'lumlar ham yo'qotiladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

4.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Ushbu

sistemaga **bir jinsli sistema** deyiladi. Bir jinsli sistema doimo birgalikda bo'radi. Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

2-teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistema tsasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin.

2-natija. n noma'lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matritsasini va uning kengaytirilgan matritsasini tuzamiz:

B matritsada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda

B matritsa rangini aniqlash bilan A matritsaning ham rangini aniqlash imkoniyati tugʻiladi. Shunday qilib, B matritsaning rangi 2 ga teng, A matritsaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda boʻladi. Maʼlum boʻldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffitsientlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4 \end{cases}$$

x_2, x_3 larni **bosh (bazis) o'zgaruvchilar**, x_1, x_4 lar esa ozod (erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani yechib $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1 = 0, x_4 = 1$ bo'lganda $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$ yechim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matritsasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo'shib, to'rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'lgan matritsaning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matritsaning rangi 3 ga teng, noma'lumlar soni to'rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma'lumlar koeffitsientidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo'lgani uchun x_4 ni o'ng tomonga o'tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 - 1 - 3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 - x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4, \quad x_2 = \frac{43}{21}x_4, \quad x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo'yib yechimning to'g'riligini ko'rish mumkin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$1) \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

2. Ushbu

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 13 = 0 \\ 5x_1 - 19x_2 - 14 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

3. Ushbu

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsa yordamida va Gauss usulida yeching.

4. Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

5-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish. Matritsalar va tenglamalar sistemasining iqtisodiy masalalarga tatbiqlari.

5.1 Matrisaviy usulda yechish.

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ matrisaga teskari } A^{-1} \text{ ni topamiz.}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 5; A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -6; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6; A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3; A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5; A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0; A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Demak, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & 2 \\ -6 & 6 & 6 & -3 \\ 9 & -3 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

ya'ni $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

2. Ushbu

$$2) \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

3. Ushbu

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsa yordamida va Gauss usulida yeching.

4. Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

6-mavzu. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi tushunchasi. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Uchburchak yuzini topish.

6.1. Koordinatlar usuli va sodda masalalar.

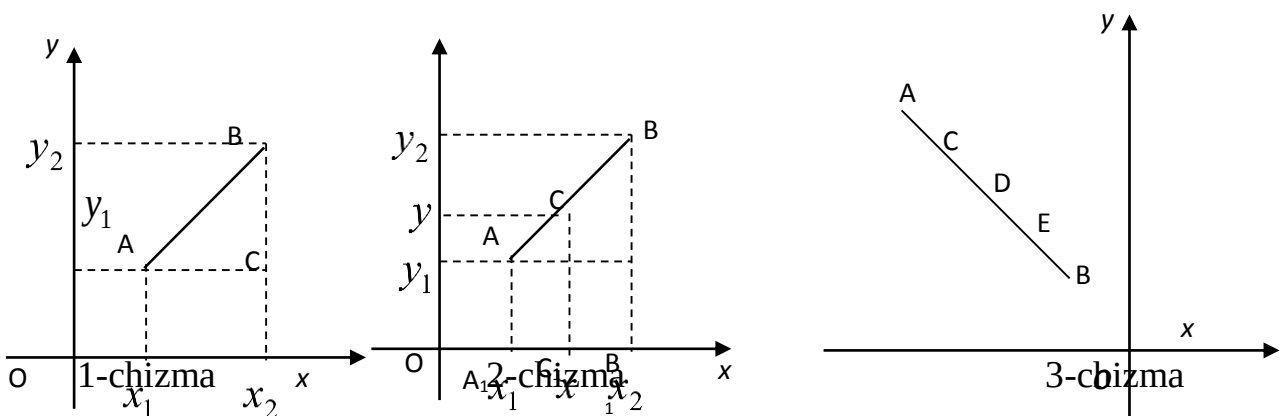
Ma'lumki, o'zaro perpendikulyar bo'lgan gorizontaal va vertikal sonlar o'qi Dekart to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning **koordinatlari** deyiladi. „Nuqta berilgan“ degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, „Nuqtani toping“ degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatlar sistemasi orqali o'rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

Bu usulni geometriyaning **sodda masalalarini yechishga** qo'llaymiz.

1) Tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma'lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC to'g'ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, shunday qilib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

bo'ladi. (1) formulaga tekislikda berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi (1-chizma).



2) AB kesma berilgan bo'lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. AB kesmani $AC:BC = \lambda$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. O'rta maktab geometriyasidan ma'lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo'lib, $A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$

bo'lganligi uchun,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \quad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Demak, C nuqtaning koordinatlari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish formulasi deyiladi. Xususiyl holda $C(x; y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa, u xolda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ bo'lib, } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

kesmani teng ikkiga bo'lish formulasi kelib chiqadi.

3) To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida uchlari $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi quyidagi formula orqali topiladi:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \quad (3)$$

1-misol. $M(5; 3)$ va $N(2; -1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko'ra: $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = -1$. Bularni (1) formulaga qo'ysak:

$$MN = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

bo'ladi.

2-misol. Tekislikda $A(5; 3), B(2; 1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0,2$ nisbatda bo'luvchi $C(x; y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $x_1 = 5, x_2 = 2, y_1 = 3, y_2 = 1, \lambda = 0,2$.

(2) formulaga asosan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{5 + 0,2 \cdot 2}{1 + 0,2} = \frac{5 + 0,4}{1,2} = \frac{5,4}{1,2} = \frac{54}{12} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 0,2 \cdot 1}{1 + 0,2} = \frac{3 + 0,2}{1,2} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4,5; \frac{8}{3}\right)$ bo'ladi.

3-misol. Uchlari $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ va $C(2; 6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. (3) formulaga ko'ra $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 6$ bo'lganligi uchun,

$$S = \frac{1}{2}[(2 \cdot 3 - 5 \cdot 0) + (5 \cdot 6 - 3 \cdot 2) + (0 \cdot 2 - 2 \cdot 6)] = \frac{1}{2}(6 + 24 - 12) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$$

bo'ladi.

4-misol. $A(-6; 7)$ va $B(-2; 3)$ nuqtalar berilgan. AB kesma C, D, E nuqtalar orqali 4 ta teng qismlarga ajratilgan. C, D, E bo'linish nuqtalarini toping (3-chizma).

Yechish: Ma'lumki $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AD}{DB} = 1$, C nuqtaning koordinatlarini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$x_c = \frac{-6 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = -5, \quad y_c = \frac{-6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 6$$

Demak, $C(-5, 6)$. (D va E nuqtalarni topish o'quvchiga havola etiladi).

5-misol. $A(5; 0)$; $B(0; 7)$; $C(0; 0)$ nuqtalar tashkil qilgan ABC uchburchakning CD bissektrissasi uzunligini toping.

Yechish. Ma'lumki, uchburchak bissektrissasi qarshi tomoni uzunliklari yon tomonlar uzunliklariga proporsional nisbatda kesadi. Demak, $D(x; y)$ nuqta AB kesmani $\lambda = \frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{5}{7}$ nisbatda bo'ladi.

U holda

$$x = \frac{5 + \frac{5}{7} \cdot 0}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{35}{12}; \quad y = \frac{0 + \frac{5}{7} \cdot 7}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{35}{12},$$

ya'ni $C\left(\frac{35}{12}; \frac{35}{12}\right)$ bo'lib CD bissektrisa uzunligi $\frac{35\sqrt{2}}{12}$.

3.Uchburchak yuzi. Dekart koordinatalar sistemasida, bir to'g'ri chiziqda yotmagan $A(x_1; u_1)$, $V(x_2; u_2)$, $S(x_3; u_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar absissalari (ox o'qiga proeksiyalari) ni Ox o'qida A_1 , V_1 , S_1 deb belgilaymiz. U holda $S_{AVS} = S_{A_1AVV_1} + S_{V_1VSS_1} - S_{A_1ASS_1}$ ekanligi aniq. Tenglik o'ng tomanidagi trapetsiyalar yuzalarini topamiz.

$$S_{A_1AVV_1} = \frac{|A_1A| + |V_1V|}{2} \cdot |A_1V_1| = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)(x_2 - x_1), \quad S_{V_1VSS_1} = \frac{|V_1V| + |S_1S|}{2} \cdot |V_1S_1| = \frac{1}{2}(u_2 + u_3)(x_3 - x_2),$$

$$S_{A_1ASS_1} = \frac{|A_1A| + |S_1S|}{2} \cdot |A_1S_1| = \frac{1}{2}(u_1 + u_3)(x_3 - x_1).$$

Demak, A, V, S nuqta ixtiyoriy joylashganligidan,

$$S_{AVS} = \frac{1}{2} \left| [(u_1 + u_2)(x_2 - x_1) + (u_2 + u_3)(x_3 - x_2) - (u_1 + u_3)(x_3 - x_1)] \right| = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(u_3 - u_1) - (x_3 - x_1)(u_2 - u_1)|$$

formulani hosil qilamiz. Masalan uchlari A(2;-1), V(3;2), S(-2;5) nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |(3 - 2)(5 + 1) - (-2 - 2)(2 + 1)| = \frac{1}{2} \cdot |6 + 12| = 9 \text{ (kv.b)}$$

Qutb koordinatalar sistemasida, bir to'g'ri chiziqda yotmagan A(r_1, φ_1), V(r_2, φ_2), S(r_3, φ_3) nuqtalarni qaraymiz. $S_{AVS} = S_{OAV} + S_{OVS} - S_{OAS}$ ekanligidan, ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra:

$$S_{OAV} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OV| \cdot \sin \angle OAV = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OC| \cdot \sin \angle BOC = \frac{1}{2} r_2 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2),$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OC| \cdot \sin \angle AOC = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1)$$

Berilgan nuqtalar ixtiyoriy joylashganligini hisobga olib:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_1 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)|$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xususan, uchburchak bir uchi qutb boshi O nuqtada bo'lsa,

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \cdot |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)| \text{ o'rinli bo'ladi.}$$

Masalan, uchlari A($3; \frac{\pi}{8}$), B($8; \frac{7\pi}{24}$), C($6; \frac{5\pi}{8}$) nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| 3 \cdot 8 \cdot \sin \left(\frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{8} \right) + 8 \cdot 6 \cdot \sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{7\pi}{24} \right) - 3 \cdot 6 \cdot \sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) \right| =$$

$$\frac{1}{2} \left| 24 \cdot \sin \frac{\pi}{6} + 48 \cdot \sin \frac{\pi}{3} - 18 \sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{1}{2} |12 + 24\sqrt{3} - 18| = 12\sqrt{3} -$$

3 (kv.b)

Agar tekislikda uchlari A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) va C(x_3, y_3) nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan bo'lsa, uning yuzi

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formula bilan topiladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Koordinatalar boshidan A(-3; 4) nuqttagacha bo'lgan masofani toping.
2. Uchlari A(4; 3), B(0; 0) va C(10, -5) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.
3. OY o'qida A(4; 5) va B(3; 2) nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan C(x; y) nuqtani toping.
4. OX o'qida A(0; 5) va B(-3; -2) nuqtalardan teng uzoqlikda bo'lgan nuqtani toping.

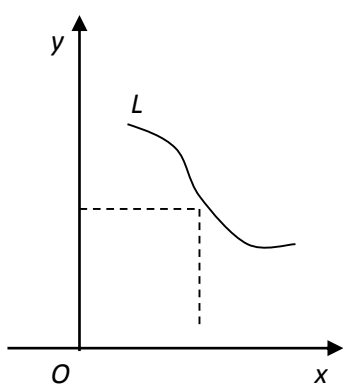
5. $A(5; -4)$ nuqta va AB kesmaning o'rtasi $C(0; -3)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi $B(x, y)$ uchini toping.
6. Uchlari $A(3; 4)$, $B(7; 7)$, $C(4; 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning teng yonli ekanligini ko'rsating.
7. $A(2; 8)$ va $B(6; -4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesma C, D, E nuqtalar bilan 4 ta teng bo'laklarga bo'lingan. C, D , va E nuqtalarni toping.
8. AB kesma $C(-1; -2)$ va $D(2; 0)$ nuqtalar orqali teng uch bo'laklarga bo'lingan. A va B nuqtalarni toping.

7-mavzu. To'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bissektрисa tenglamalari. Analitik geometriyaning sodda masalalari.

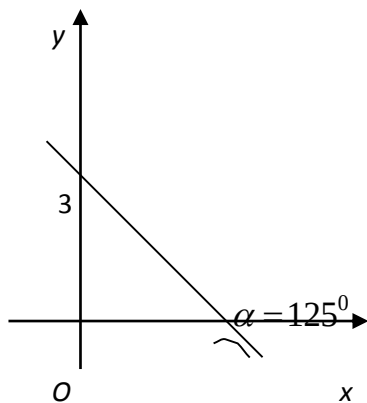
7.1 To'g'ri chiziq va uning tenglamalari.

To'g'ri chiziq tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to'g'ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to'g'ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o'rganamiz.

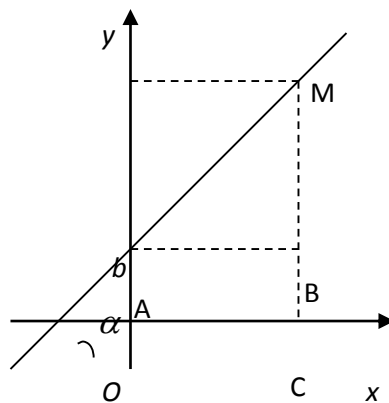
1). To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi. To'g'ri chiziqning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to'g'ri chiziqning ordinatlar o'qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^\circ$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (6-chizma). AMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ bundan } BM = AB \operatorname{tg} \alpha$$

6-chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = AB \operatorname{tg} \alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ bo'ladi. $\operatorname{tg} \alpha$ to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deyiladi va $\operatorname{tg} \alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsientli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinata burchagining bissektrisasi bo'ladi.

1-misol. OX o'qi bilan 120° burchak hosil qiluvchi va OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra, to'g'ri chiziq OY o'qini $A(0; 3)$ nuqtada kesib o'tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o'qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120° burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi bo'ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bulsin.

$$y = kx + b \quad (3)$$

to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

hosil bo'ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2, y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4) ga qo'yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki** $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so'm xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to'g'ri chiziq) bo'lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo'yicha $A(100, 300)$ va $B = (500, 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100}, \text{ yoki } y = 2,5x + 50$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan $x = 400$ uchun, $y = 1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so‘m xarajat qilinadi.

3). To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma‘lumli

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamani qaraymiz. Bundan, $By = -Ax - C$, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ bo‘lib, $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y = kx + b$ tenglama hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $Ax + By + C = 0$ tenglama ham to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari:

1). $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ bo‘lsa, $Ax + By = 0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ bo‘lsa, $y = -\frac{C}{B}$ bo‘lib, OY o‘qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

3) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ bo‘lsa, $x = -\frac{C}{A}$ bo‘lib, OX o‘qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib, OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

4) $A = 0, C = 0, B \neq 0$ bo‘lsa, $y = 0$ bo‘lib, OX o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

5) $B = 0, C = 0, A \neq 0$ bo‘lsa, $x = 0$ bo‘lib, OY o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

6) $A = 0, B = 0, C \neq 0$ bo‘lsa, $C = 0$ bo‘lib, o‘zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo‘lishi mumkin emas.

3-misol. $x - 2y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y = x + 6$, $y = 1/2 \cdot x + 3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k = 1/2$, $b = 3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffisientli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

5). To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. To‘g‘ri chiziqqa koordinata boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (8)$$

bo‘ladi. (8) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma‘lumki, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallovchi ko'paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamaga ko'paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo'ladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p = 3$ va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi 30° bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra normal OX o'qi bilan 30° li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo'zg'aluvchi tomoni normal to'g'ri chiziq bo'ladi. Shu to'g'ri chiziqda $p = 3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Endi to'g'ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko'ra normalning uzunligi va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma'lumki, to'g'ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p = 3$, $\alpha = 30^\circ$ bo'lganligi uchun $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 3 = 0$ yoki $\sqrt{3}/2 \cdot x + 1/2 \cdot y - 3 = 0$

Natijada $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

6-misol. $4x - 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko'paytuvchini topamiz: $M = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamani $M = 1/5$ ko'paytirib, $4/5 \cdot x - 3/5 \cdot y - 1 = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1, \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1) \text{ edi.}$$

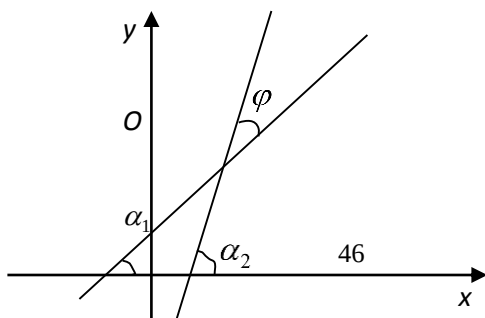
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Ikkita

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bunda $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



9-chizma.

Ya'ni, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (9-chizma). Ma'lumki,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

yoki

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (1)$$

bo'ladi. (1) ikki to'g'ri chiziqli orasidagi burchakning tangensini topish formulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1$, $y = 2x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3 - 2}{1 + 2 \cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bulib, } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \approx \operatorname{arctg} 0.14 \approx 8^\circ, \varphi \approx 8^\circ$$

bo'ladi.

To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik, parallellik va kesishish shartlari

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^\circ \text{ bo'lib, } \operatorname{tg} 90^\circ = \infty \text{ yoki } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo'ladi, bunga ikki to'g'ri chiziqliqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi = 0$ bo'lib, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \quad k_2 - k_1 = 0, \quad k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to'g'ri chiziqliqning parallellik sharti** deyiladi.

Ikkita to'g'ri chiziqliqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

$$\mathbf{2-misol.} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.}$$

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni hadma-had qo'shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo'ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, bu to'g'ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqliqqa bo'lgan masofa.

$M(x_0; y_0)$ nuqta va $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ to'g'ri chiziqli berilgan bo'lsin.

Berilgan nuqtadan, berilgan to'g'ri chiziqliqqa bo'lgan masofa

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (2)$$

formula yordamida topiladi. To'g'ri chiziqli tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3; \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{|6 + 5 - 2|}{3} = \frac{9}{3}, \quad d = 3$$

bo‘ladi.

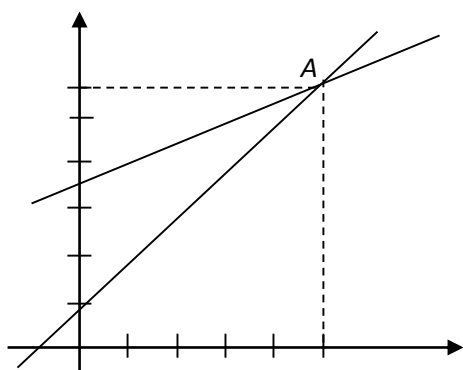
4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish xarajatlari funksiyasi

$$y = 100 + 50x \quad \text{va} \quad y = 200 + 30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport xarajati, x har yuz kilometrda yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliror bo‘ladi.

Yechish. Masala shartida berilgan $y = 100 + 50x$ va $y = 200 + 30x$ to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo‘lganligi uchun $100 + 50x = 200 + 30x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = 5$, $y = 350$ bo‘ladi. Demak, to‘g‘ri chiziqlar $A(5,350)$ nuqtada kesishadi.

Endi to‘g‘ri chiziqlarni yasaymiz: (10-chizma).



10- chizma

10-chizmadan ko‘rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo‘lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, xarajat kamroq bo‘ladi.

Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish.

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \text{va} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g‘ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g‘ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo‘lib, $A(4,15)$ 1-to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bulgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \left| \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d = \frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. OY o'qidan $b = 4$ kesma ajratib OX o'qi bilan 135° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

2. OY o'qidan $b = -2$ kesma ajratib OX o'qi bilan 60° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

3. Koordinatlar boshidan o'tib, OX o'qi bilan:

1). 45° , 2). 120° , 3). 60° , 4). 90° burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

4. 1) $3x + 5y + 15 = 0$; 2) $3x + 2y = 0$; 3) $y = -2$; 4) $x/4 + y/4 = 1$ to'g'ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

5. 1) $4x + 3y - 12 = 0$; 2) $4x + 3y = 0$; 3) $2x - 7 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

6. $y = 1/2 \cdot x + 4$ to'g'ri chiziq berilgan. Uning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

7. Boshlang'ich ordinatasi $b = -3$ bo'lgan va $y = 2x + 3$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.

8. $y = \sqrt{3}x - 2$ va $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$ to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning absissa o'qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.

9. $y = -2/5 \cdot x + 3$; $y = 3/7 \cdot x + 2/7$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

10. $6x + 8y + 5 = 0$; $2x - 4y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

11. 1) $3x - 15y + 16 = 0$, 2) $3x + 15y - 8 = 0$, 3) $6x - 30y + 13 = 0$,
4) $30x + 6y + 7 = 0$

to'g'ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.

12. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

1) $y = 2/3 \cdot x - 7$; $2x - 4y + 9 = 0$
 $y = 5x + 9$; 2) $6x - 2y - 3 = 0$

3) $y = 3/7 \cdot x - 2$ $x/4 - y/5 = 1$
4) $7x + 3y + 5 = 0$ $x/2 + y/18 = 1$

8-mavzu. Vektorlar va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi va komponentalari. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi va ularning asosiy xossalari.

Fizik, kimyoviy va boshqa hodisalarni o'rganishda uchraydigan kattaliklarni ikki sinfga bo'lish mumkin.

Skalyar kattaliklar deb ataladigan kattaliklar sinfi mavjudki, ularni xarakterlash uchun bu kattaliklarning son qiymatlarini ko'rsatish yetarlidir. Bular masalan, hajm, massa, zichlik, harorat va boshqalardir. Lekin shunday kattaliklar mavjudki, ular faqat son qiymatlari bilangina emas, balki yo'nalishi bilan ham xarakterlanadi.

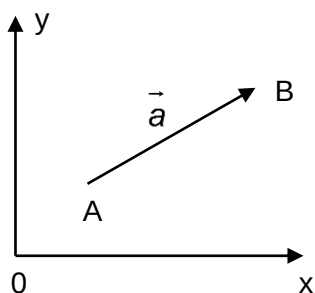
Ular yo'naltirilgan kattaliklar yoki vektor kattaliklar deb ataladi. Masalan, harakatlanayotgan nuqtaning bir vaziyatdan ikkinchi vaziyatga ko'chishida ta'sir etayotgan kuchni xarakterlash uchun kuchning o'lchamlarini ko'rsatish kifoya qilmasdan, balki bu kuchning yo'nalishini ham ko'rsatish zarurdir. Harakat tezligi magnit yoki elektr maydonning kuchlanganligi va boshqa kattaliklar ham shunga o'xshash xarakterlanadi. Bularning hammasi vektor kattaliklarga oid misoldir. Ularni tasvirlash uchun vektor tushunchasi kiritilgan bo'lib, u matematikaning o'zi uchun ham foydali bo'lib chiqdi. Biz yuqorida yo'nalgan kesma haqida gapirganimizda, unda yo'nalish aniqlangan, ya'ni uning chetki nuqtalaridan qaysi biri boshi, qaysi biri oxiri ekanligi ko'rsatilgan kesma ekanligi haqida aytgan edik.

Ma'lumki, tabiatdagi mavjud barcha kattaliklarni ikki guruhga ajratish mumkin. Skalyar va vektor kattaliklar. Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklar skalyar kattaliklar deb ataladi. Masalan massa, zichlik, uzunlik, temperatura kabi kattaliklar skalyar kattaliklarga misol bo'la oladi.

Shunday kattaliklar mavjudki, ular son qiymati hamda yo'nalishi bilan aniqlanadi. Masalan bosib o'tilgan yo'l, tezlik, tezlanish kabi kattaliklar. Bu kabi kattaliklar vektor kattaliklar deb ataladi.

Ta'rif. Son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar vektor kattaliklar deb ataladi.

Tekislikda A va B nuqtalar berilgan bo'lsin. A nuqtadan B nuqtaga yo'nalgan vektor $\overrightarrow{AB}$ deb belgilanadi va A nuqta vektorning bosh nuqtasi, B nuqta esa oxirgi nuqtasi deb ataladi. Vektor $\vec{a}$ ham deb belgilanadi.



$\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligi uning moduli ham deb ataladi va u $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi va oxiri usma-ust tushgan vektor nol vektor deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Bu vektor aniq yo'nalishga ega emas va uning moduli 0 ga teng, ya'ni $|\vec{0}| = 0$.

Ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar kollinear vektorlar deb ataladi.

Kollinear vektorlar bir xil yoki qarama-qarshi yo'nalgan bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Bir xil yo'nalishga ega va uzunliklari teng bo'lgan vektorlar teng vektorlar deb ataladi.

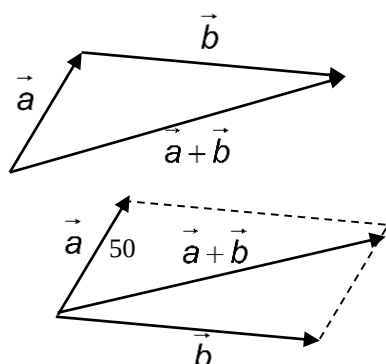
Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng bo'lsa, u $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deb ataladi.

Ta'rif. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi.

Vektorlar ustida amallar

Vektorlarni qo'shish. Vektorlarni qo'shishda uchburchak yoki parallelogramm qoidalaridan foydalanish mumkin. Uchburchak qoidasi:

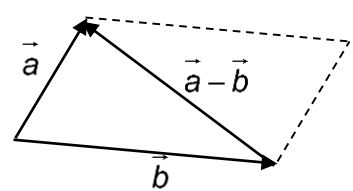
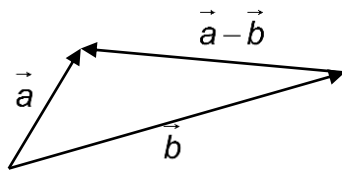


Parallelogramm qoidasi:

Vektorlarni qo'shish quyidagi xossalarga ega:

1. O'rin almashtirish xossasi, ya'ni $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Guruppalash xossasi, ya'ni $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Vektorlarni ayirish. Vektorlarni ayirishda uchburchak yoki parallelogramm qoidalaridan foydalanish mumkin. Uchburchak qoidasi:



Parallelogramm qoidasi:

Vektorni songa ko'paytirish. $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorni $m \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kolleniar, uzunligi $|m| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $m > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishdagi, $m < 0$ bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m\vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi. Vektorlarni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1. O'rin almashtirish xossasi: $m \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot m$.
2. Skalyar songa ko'paytirishga nisbatan guruhlash xossasi: $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$.
3. Skalyarlarni qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi: $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.
4. Vektorni qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.

Ta'rif. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor, birlik vektor deb ataladi.

Chiziqli erkli vektorlar sistemasi

n ta $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektor va n ta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ yig'indiga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataladi.

Ta'rif. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi noldan farqli shunday n ta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar mavjud bo'lsinki, vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi nolga teng, ya'ni $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ bo'lsa, u sistema chiziqli bog'liq sistema deb ataladi. Aks holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar chiziqli erkli deb ataladi.

Chiziqli erkli vektorlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

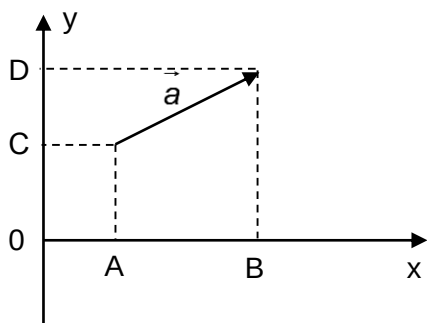
Bu yerda $\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ deb belgilash kiritsak, u holda

$$\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n$$

ga ega bo‘lamiz. Bu tenglik $\vec{a}_1$ vektorning $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar orqali chiziqli kombinatsiyasini ifodalaydi.

Ta’rif. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni n ta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda bu vektorlar fazoning bazisi deb ataladi.

Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}$ vektor berilgan bo‘lsin. $|AB|$ va $|CD|$ kesmalar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning Ox va Oy o‘qlaridagi proeksiyalari deb ataladi.



Dekart koordinatalar tekisligida berilgan har qanday $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a} = a_x i + a_y j$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda a_x va a_y lar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning Ox va Oy o‘qlardagi proyeksiyalari. i va j lar esa mos ravishda Ox va Oy o‘qlar bo‘yicha yo‘nalgan birlik vektorlar.

Agar $\vec{a}$ vektorni uch o‘lchovli Dekart koordinatalar sistemasida qarasak, u holda bu vektorni $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Fazoda biror I o‘q va biror fazoda joylashgan AB vektor berilgan bo‘lsin. A1 va B1 nuqtalar A va B nuqtalarning I o‘qdagi proyeksiyasi bo‘lsin. Aytaylik A1(x1) va B1(x2) I o‘qdagi koordinatasi bo‘lsin. A1B1 vektor AB vektorning I o‘qdagi tashkil etuvchisi yoki komponentasi deyiladi.

A	V
A1	V1
	l
x1	x2

Agar AB vektor I o‘q bilan o‘tkir burchak hosil qilsa, u holda $x_2 - x_1 > 0$ bo‘ladi;
 AB vektor I o‘qi bilan o‘tmas burchak hosil qilsa, u holda $x_2 - x_1 < 0$ bo‘ladi;
 AB vektor I ga perpendikular bo‘ladi, agar $x_2 - x_1 = 0$ bo‘lsa.
 Vektorni I o‘qdagi proeksiyasini PrIAB shaklida belgilanadi.

Misol: 1) A(6; -1; 2), B(-3; 1; 4); bo‘lsa, $AB = -9i + 2j + 2k$.
 2) $a = 2i - 4j + 5k$; $b = -4i + 3j + 8k$.
 $a + b = (2 - 4)i + (-4 + 3)j + (5 + 8)k = -2i - j + 13k$.
 $a - b = (2 - (-4))i + (-4 - 3)j + (5 - 8)k = 6i - 7j - 3k$.
 $5a = 5 \cdot 2i - 5 \cdot 4j + 5 \cdot 5k = 10i - 20j + 25k$

9-mavzu. Vektorlar va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi va komponentalari. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va ularning asosiy xossalari.

Fizik, kimyoviy va boshqa hodisalarni o‘rganishda uchraydigan kattaliklarni ikki sinfga bo‘lish mumkin.

Skalyar kattaliklar deb ataladigan kattaliklar sinfi mavjudki, ularni xarakterlash uchun bu kattaliklarning son qiymatlarini ko‘rsatish yetarlidir. Bular masalan, hajm,

massa, zichlik, harorat va boshqalardir. Lekin shunday kattaliklar mavjudki, ular faqat son qiymatlari bilangina emas, balki yo'nalishi bilan ham xarakterlanadi.

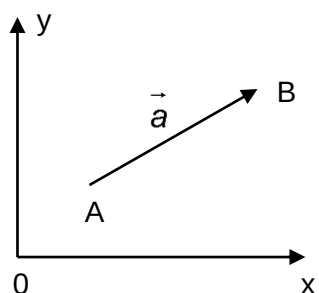
Ular yo'naltirilgan kattaliklar yoki vektor kattaliklar deb ataladi. Masalan, harakatlanayotgan nuqtaning bir vaziyatdan ikkinchi vaziyatga ko'chishida ta'sir etayotgan kuchni xarakterlash uchun kuchning o'lchamlarini ko'rsatish kifoya qilmasdan, balki bu kuchning yo'nalishini ham ko'rsatish zarurdir. Harakat tezligi magnit yoki elektr maydonning kuchlanganligi va boshqa kattaliklar ham shunga o'xshash xarakterlanadi. Bularning hammasi vektor kattaliklarga oid misoldir. Ularni tasvirlash uchun vektor tushunchasi kiritilgan bo'lib, u matematikaning o'zi uchun ham foydali bo'lib chiqdi. Biz yuqorida yo'nalgan kesma haqida gapirganimizda, unda yo'nalish aniqlangan, ya'ni uning chetki nuqtalaridan qaysi biri boshi, qaysi biri oxiri ekanligi ko'rsatilgan kesma ekanligi haqida aytgan edik.

Ma'lumki, tabiatdagi mavjud barcha kattaliklarni ikki guruhga ajratish mumkin. Skalyar va vektor kattaliklar. Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklar skalyar kattaliklar deb ataladi. Masalan massa, zichlik, uzunlik, temperatura kabi kattaliklar skalyar kattaliklarga misol bo'la oladi.

Shunday kattaliklar mavjudki, ular son qiymati hamda yo'nalishi bilan aniqlanadi. Masalan bosib o'tilgan yo'l, tezlik, tezlanish kabi kattaliklar. Bu kabi kattaliklar vektor kattaliklar deb ataladi.

Ta'rif. Son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar vektor kattaliklar deb ataladi.

Tekislikda A va B nuqtalar berilgan bo'lsin. A nuqtadan B nuqtaga yo'nalgan vektor $\overrightarrow{AB}$ deb belgilanadi va A nuqta vektorning bosh nuqtasi, B nuqta esa oxirgi nuqtasi deb ataladi. Vektor $\vec{a}$ ham deb belgilanadi.



$\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligi uning moduli ham deb ataladi va u $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi va oxiri usma-ust tushgan vektor nol vektor deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Bu vektor aniq yo'nalishga ega emas va uning moduli 0 ga teng, ya'ni $|\vec{0}| = 0$.

Ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar kollinear vektorlar deb ataladi.

Kollinear vektorlar bir xil yoki qarama-qarshi yo'nalgan bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Bir xil yo'nalishga ega va uzunliklari teng bo'lgan vektorlar teng vektorlar deb ataladi.

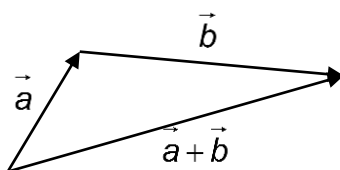
Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng bo'lsa, u $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deb ataladi.

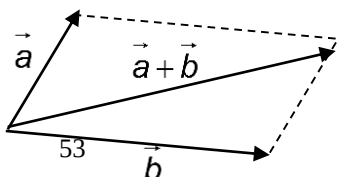
Ta'rif. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi.

Vektorlar ustida amallar

Vektorlarni qo'shish. Vektorlarni qo'shishda uchburchak yoki parallelogramm qoidalaridan foydalanish mumkin. Uchburchak qoidasi:



Parallelogramm qoidasi:

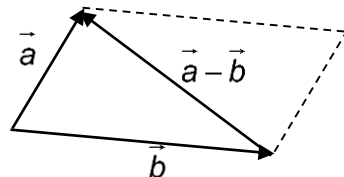
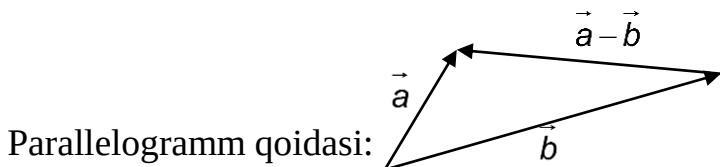


Vektorlarni qo'shish quyidagi xossalarga ega:

3. O'rin almashtirish xossasi, ya'ni $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

4. Guruppalash xossasi, ya'ni $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Vektorlarni ayirish. Vektorlarni ayirishda uchburchak yoki parallelogramm qoidalaridan foydalanish mumkin. Uchburchak qoidasi:



Vektorni songa ko'paytirish. $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorni $m \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kolleniar, uzunligi $|m| \cdot |\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, $m > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishdagi, $m < 0$ bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m\vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi. Vektorlarni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

5. O'rin almashtirish xossasi: $m \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot m$.

6. Skalyar songa ko'paytirishga nisbatan guruhlash xossasi: $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$.

7. Skalyarlarni qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi: $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.

8. Vektorni qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.

Ta'rif. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor, birlik vektor deb ataladi.

Chiziqli erkli vektorlar sistemasi

n ta $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektor va n ta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$ yig'indiga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataladi.

Ta'rif. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi noldan farqli shunday n ta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar mavjud bo'lsinki, vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi nolga teng, ya'ni $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ bo'lsa, u sistema chiziqli bog'liq sistema deb ataladi. Aks holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar chiziqli erkli deb ataladi.

Chiziqli erkli vektorlar uchun $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda $\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$ deb belgilash kiritsak, u holda

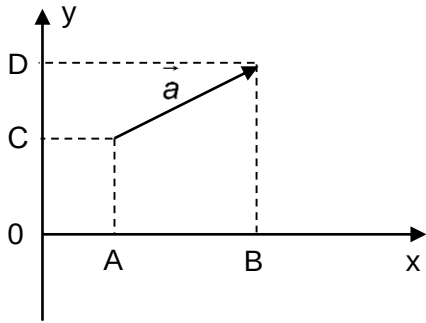
$$\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglik $\vec{a}_1$ vektorning $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar orqali chiziqli kombinatsiyasini ifodalaydi.

Ta'rif. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni n ta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bu vektorlar fazoning bazisi deb ataladi.

Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsin. $|AB|$ va $|CD|$ kesmalar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning Ox va Oy o'qlaridagi proeksiyalari deb ataladi. Dekart

koordinatalar tekisligida berilgan har qanday $\vec{a}$ vektorni



$$\vec{a} = a_x i + a_y j$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda a_x va a_y lar mos ravishda $\vec{a}$ vektorning Ox va Oy o'qlardagi proyeksiyalari. i va j lar esa mos ravishda Ox va Oy o'qlar bo'yicha yo'nalgan birlik vektorlar.

Agar $\vec{a}$ vektorni uch o'lchovli Dekart koordinatalar sistemasida qarasak, u holda bu vektorni $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Fazoda biror I o'q va biror fazoda joylashgan AB vektor berilgan bo'lsin. A1 va B1 nuqtalar A va B nuqtalarning I o'qdagi proyeksiyasi bo'lsin. Aytaylik A1(x1) va B1(x2) I o'qdagi koordinatasi bo'lsin. A1B1 vektor AB vektorning I o'qdagi tashkil etuvchisi yoki komponentasi deyiladi.

A	V
A1	V1
	l
x1	x2

Agar AB vektor I o'q bilan o'tkir burchak hosil qilsa, u holda $x_2 - x_1 > 0$ bo'ladi;
 AB vektor I o'qi bilan o'tmas burchak hosil qilsa, u holda $x_2 - x_1 < 0$ bo'ladi;
 AB vektor I ga perpendikular bo'ladi, agar $x_2 - x_1 = 0$ bo'lsa.
 Vektorni I o'qdagi proeksiyasini $PrIAB$ shaklida belgilanadi.

Misol: 1) $A(6; -1; 2), B(-3; 1; 4)$; bo'lsa, $AB = -9i + 2j + 2k$.
 2) $a = 2i - 4j + 5k; \quad b = -4i + 3j + 8k$.
 $a + b = (2 - 4)i + (-4 + 3)j + (5 + 8)k = -2i - j + 13k$.
 $a - b = (2 - (-4))i + (-4 - 3)j + (5 - 8)k = 6i - 7j - 3k$.
 $5a = 5 \cdot 2i - 5 \cdot 4j + 5 \cdot 5k = 10i - 20j + 25k$

10-mavzu. Vektorlarning vektor ko'paytmasi, aralash ko'paytmasi va ularning xossalari. Vektorlarning geodezik masalalarga tatbiqlari.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklarini ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi, ya'ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

Skalyar ko'paytmaning xossalari:

O'rin almashtirish xossasi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

Songa ko'paytirishga nisbatan guruhlash xossasi: $(\lambda \vec{a}) \vec{b} = \lambda(\vec{a} \vec{b})$;

Vektorlarni qo‘shishga nisbatan taqsimot xossasi: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Vektor uzunligi. $\vec{a}$ vektorning o‘z-o‘ziga skalyar ko‘paytmasini qaraymiz. Bu ko‘paytma vektorning skalyar kvadrati deb ataladi:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Skalyar ko‘paytma $\vec{a}^2$ ko‘rinishda ham belgilanadi, ya’ni $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Bu yerdan $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Agar $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ ekanligini hisobga olsak, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ga ega bo‘lamiz. Bu vektor uzunligini hisoblash formulasi bo‘ladi.

Ikki vektor orasidagi burchak

Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ formuladan foydalansak, $\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ ga ega bo‘lamiz.

Bu yerdan $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)$ ga, ya’ni ikki vektor orasidagi burchakni hisoblash formulasiga ega bo‘lamiz.

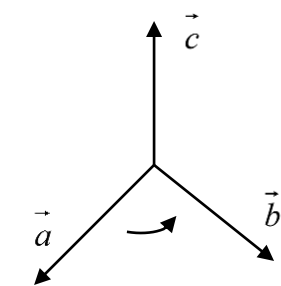
Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ va $\vec{b} = b_x i + b_y j + b_z k$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda bu ikki vektor orasidagi burchak

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\right) \text{ formula yordamida aniqlanadi.}$$

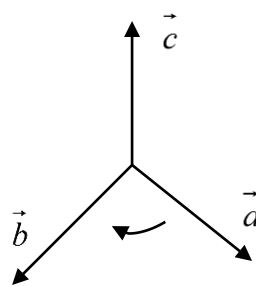
Misol. $\vec{a} = i + k$ va $\vec{b} = i + 2j + 2k$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Vektorlarning vektor ko‘paytmasi

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu vektorlarni umumiy boshlanish nuqtasiga keltiramiz. Komplanar bo‘lmagan tartiblangan vektorlar uchligida uchinchi vektor uchidan kuzatilganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga eng qisqa burilish masofasi soat mili aylanishiga teskari yo‘nalishda bo‘lsa, u o‘ng uchlik deb ataladi. Aks holda vektorlar uchligi chap uchlik deb ataladi(rasm).



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o‘ng uchlik



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chap uchlik

Ta’rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar;

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi;

$\vec{c}$ vektor uzunligi $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ ga, ya'ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogramning yuziga teng.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ ko'rinishda belgilanadi.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

O'rin almashtirish xossasi: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;

Vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni: $[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;

Agar vektorlar o'zining koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ va $\vec{b} = b_x i + b_y j + b_z k$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda bu vektorlarning vektor ko'paytmasi quyidagi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

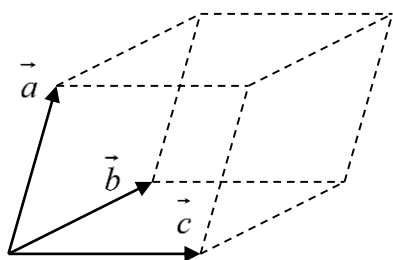
Misol. $\vec{a} = 3i - 4j + k$ va $\vec{b} = i + 2j - 2k$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan $[\vec{b}, \vec{c}]$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ko'rinishda belgilanadi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasining son qiymati shu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmiga teng bo'ladi.



Aralash ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

Misol: Uchlari $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D(-2;-4;-7)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini toping.

Yechish: Elementar geometriyadan ma'lumki, piramidaning hajmi parallelepiped hajmining oltidan biriga teng.

$$V_{\text{pir}} = 1/6 V_{\text{par-d}} = 1/6 |\vec{AB} * \vec{AC} * \vec{AD}|$$

$$\vec{AB} = 3i + 3j + 3k; \vec{AC} = 2i + 4j + 4k; \vec{AD} = -3i - 5j - 8k;$$

Shunday qilib,

$$V_{\text{pir}} = \pm 1/6 (AB*AC*AD) = \pm 1/6 * \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \pm 1/6 (-18)$$

$$V_{\text{pir}} = 1/6 * 18 = 3 \text{ kub. bir.}$$

Agar uch vektorning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda bu vektorlar komplanarlik shartida bo'ladi.

$$abc = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

11-mavzu. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: aylana, ellips – ularning kanonik tenglamasi va asosiy elementlari.

Oxy koordinatalar sistemasida x, y o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi chiziq (egri chiziq) tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziq deyiladi. Tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarga aylana, ellips, giperbola va parabola kiradi.

Bu to'rtta chiziqlar va ularning buzilish holatlari, ya'ni ikkinchi darajali tenglama bo'sh to'plamni (mavhum egri chiziqni), nuqtani, parallel to'g'ri chiziqlar juftini, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini aniqlaydigan holatlar ikkinchi tartibli algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi barcha chiziqlarni to'la-to'kis ifodalaydi.

Aylana

1-ta'rif. Markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aylana deyiladi.

$M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan R masofada yotuvchi tekislik nuqtalarini qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x; y)$ nuqta bo'lsin (1-shakl).

Aylananing ta'rifiga ko'ra $|M_0M| = R$.

Bundan

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

yoki

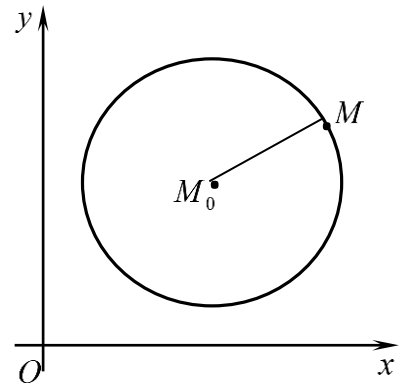
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$

(1) tenglamaga aylanani kanonik tenglamasi deyiladi. Bunda $M_0(x_0; y_0)$ nuqta aylana markazi, R masofa aylana radiusi deb ataladi.

Xususan, $x_0 = 0, y_0 = 0$ da (1) tenglamadan topamiz:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2)$$

Bu tenglama markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanani aniqlaydi.



1-shakl

Misol

Koordinatalari $x = R \cos t, y = R \sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x; y)$ nuqta aylana nuqtasi bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun $M(x; y)$ nuqta koordinatalarining har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va hadlab qo'shamiz:

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2$$

yoki

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Demak, koordinatalari $x = R \cos t, y = R \sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x; y)$ nuqta markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanada yotadi.

Aylanani aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (3)$$

tenglamalar sistemasiga aylanani parametrik tenglamalari deyiladi.

Misol

$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi aylanani markazi va radiusini topamiz. Buning uchun tenglamaning chap tomonida x va y ga nisbatan to'la kvadrat ajratamiz:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$$

yoki

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Bu tenglama markazi $M_0(-4; 2)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R = 5$ ga teng aylanani ifodalaydi.

Ellips

2-ta'rif. Har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarning yig'indisi o'zgarmas miqdorga teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga ellips deyiladi.

F_1 va F_2 ellipsning fokuslari, M ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $|F_1F_2| = 2c$, $|F_1M| = r_1$, $|F_2M| = r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Ellipsning ta'rifiga ko'ra

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad (4)$$

bu yerda a – o'zgarmas son ($2a > 2c$).

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan o'tadigan va Oy o'q $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo'ladigan qilib tanlaymiz (2-shakl).

U holda $M(x; y)$, $F_2(-c; 0)$, $F_1(c; 0)$ bo'ladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

r_1 va r_2 ni (4) tenglikka qo'yib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(x - c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + xc,$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b^2 = a^2 - c^2$ (chunki $a > c$) belgilash kiritib, topamiz:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

tenglamaga ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

Misol

$x = acost$, $y = b\sin t$ tengliklar ellipsning nuqtasini aniqlashini ko'rsatamiz.

$x = acost$, $y = b\sin t$ tengliklardan topamiz: $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$.

U holda $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ya'ni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Demak, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ tengliklar ellipsning nuqtasini aniqlaydi.

Ellipsni aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (6)$$

tenglamalar sistemasiga ellipsning parametrik tenglamalari deyiladi.

Ellipsning shaklini uning (5) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(5) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun ellips Ox , Oy o'qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli (5) tenglamani

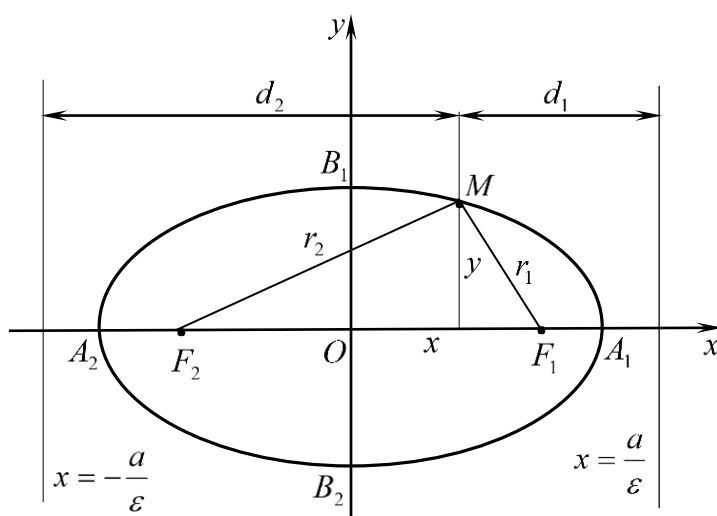
$x \geq 0$, $y \geq 0$ da (I-chorakda)

tekshirish etarli bo'ladi.

I-chorakda (5) tenglamadan

$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ kelib chiqadi.

Bunda x koordinata 0 dan a gacha o'sganida y koordinata b dan 0 gacha kamayadi. Ellipsning qolgan chorakdagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (3-shakl).



3-shakl

Ellipsda $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$ kesmalarning $2a$, $2b$ uzunliklariga mos ravishda katta va kichik o'qlar, a , b sonlarga mos ravishda katta va kichik yarim o'qlar, $|F_1M|$, $|F_2M|$ kesmalarning r_1 , r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

Ellipsning shakli $\frac{b}{a}$ nisbatga bog'liq bo'ladi, ammo ellipsning shaklini $\frac{c}{a}$ nisbat yordamida tekshirish qulaylikka ega.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka ellipsning ekstsentrtsiteti deyiladi. Bunda $0 < \varepsilon < 1$, chunki $0 < c < a$.

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ dan } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}, \text{ ya'ni } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \text{ Demak, } \varepsilon \rightarrow 1 \text{ da } \frac{b}{a} \rightarrow 0,$$

ya'ni b kichiklashib, ellips Ox o'qqa tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon \rightarrow 0$ da $\frac{b}{a} \rightarrow 1$, ya'ni ellips aylanaga yaqinlashib boradi.

M nuqtadan d_1, d_2 masofada o'tuvchi va

tenglamalari $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ dan iborat bo'lgan to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deb ataladi. Direktrisalar ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Bu tengliklardan ellipsning fokal radiuslari uchun

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

formulalar kelib chiqadi.

$b^2 = a^2 - c^2$ dan $a > b$ kelib chiqadi. Agar $a < b$ bo'lsa, u holda (5) tenglama uzunligi $2b$ ga teng katta o'qi Oy o'qida yotuvchi va uzunligi $2a$ ga teng kichik o'qi Ox o'qida yotuvchi ellipsni aniqlaydi (4-shakl).

Bu ellipsning fokuslari $F_1(0; c)$ va $F_2(0; -c)$ nuqtalarda yotadi, bu yerda $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Agar $a = b$ bo'lsa, u holda (5) tenglamadan $x^2 + y^2 = a^2$ tenglama, ya'ni markazi koordinata boshida yotuvchi va radiusi a ga teng aylana tenglamasi kelib chiqadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi hisoblanadi.

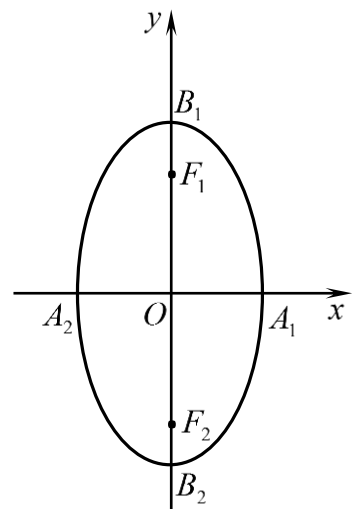
Misol

$4x^2 + 9y^2 = 144$ ellipsning o'qlari uzunliklarini, fokuslarining koordinatlarini va eksentrisitetini topamiz. Buning uchun ellipsning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Bundan $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Demak, $a = 6$, $b = 4$, $2a = 12$, $2b = 8$. Shunday qilib ellips o'qlarining uzunliklari mos ravishda 12 va 8 ga teng.

a va b ni bilgan holda c ni topamiz:



4-shakl

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}.$$

Bundan fokuslarning koordinatalarini va eksentrisitetni topamiz:

$$F_{21}(2\sqrt{5};0), F_2(-2\sqrt{5};0);$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1.. $N(7; -2)$ nuqtadan o'tib, markazi $C(3; -5)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

2. $M(4; 2)$ va $N(12; 8)$ nuqtalar berilgan. Diametri MN kesmadan iborat bo'lgan aylana tenglamasini yozing.

3. Ushbu

$$1) x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0;$$

$$2) 3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y - 29/3 = 0;$$

$$3) x^2 + y^2 + 7x = 0;$$

$$4) 5x^2 + 5y^2 + 9y = 0$$

aylanalarning markazlarini va radiuslarini toping.

4. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$, va $x^2 + y^2 + 8x + 12y - 14 = 0$ aylanalar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini yozing.

5. Fokuslari orasidagi masofa 24, katta o'qi 26 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing va uni yasang.

6. Quyidagilar berilganda ellipsning kanonik tenglamasini toping:

1) katta yarim o'q 10, eksentrisitet 0,8;

2) kichik yarim o'q 12, eksentrisitet 5/13;

3) eksentrisitet 0,6, fokuslar orasidagi masofa 6.

7. 1) $9x^2 + 25y^2 = 225$, 2) $9x^2 + y^2 = 36$ ellipslar uchun o'qlarining uzunliklarini, fokuslarini va eksentrisitetlarini toping va yasang.

8. Koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips $M(2; \sqrt{3})$ va $N(0; 2)$ nuqtalardan o'tadi. Ellips tenglamasini yozing. M nuqtadan fokuslarga masofalarni toping.

9. Ellipsning eksentrisiteti ε berilgan. Ellips yarim o'qlarining b/a nisbatini toping.

12-mavzu. Giperbola va parabola – ularning kanonik tenglamasi va asosiy elementlari.

Giperbola

1-ta’rif. Har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo’lgan masofalar ayirmasining moduli o’zgarmas miqdorga teng bo’lgan tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga giperbola deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o’q F_1 va F_2 fokuslardan o’tadigan va Oy o’q $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo’ladigan qilib tanlaymiz (1-shakl).

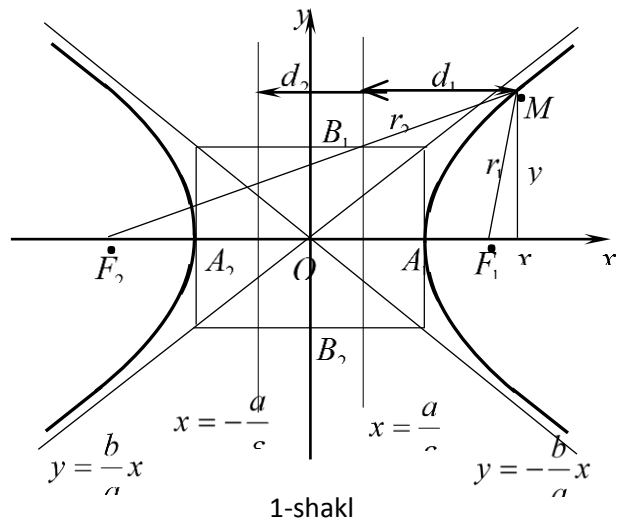
$M(x; y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. $|F_1F_2| = 2c$, $|F_1M| = r_1$,
 $|F_2M| = r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Giperbolaning tarifiga ko’ra

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad (1)$$

bu yerda a – o’zgarmas son
 $(2a < 2c)$.

(1) ifodada almashtirishlar bajarib, quyidagi tenglamani keltirib chiqaramiz:



1-shakl

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$.

(2) tenglamaga giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Giperbolaning shaklini uning (2) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(2) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun giperbola ellips kabi Ox , Oy o’qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo’ladi. Shu sababli (2) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$ da (I-chorakda) tekshiramiz.

I-chorakda (2) tenglamadan $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq a$ va x koordinata 0 dan boshlab o’sishi bilan y koordinata ham o’sib boradi, ya’ni $x \rightarrow +\infty$ da $y \rightarrow +\infty$ ($M(x; y) \rightarrow \infty$). $M(x; y)$ nuqta cheksizlikka qanday qilib intilishini ko’rsatish uchun koordinatalar boshidan o’tuvchi va burchak koeffitsiyenti $k = \frac{b}{a}$ ga teng bo’lgan $y = \frac{b}{a}x$ to’g’ri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq ushbu xossaga ega: M nuqta giperbola bo’ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari bu to’g’ri chiziqqa juda yaqinlashib boradi, lekin uni kesib o’tmaydi, ya’ni asimptotik yaqinlashadi.

Shunday qilib, giperbola I-chorakda $A_1(a;0)$ nuqtadan o'tib, $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa asimptotik yaqinlashgani holda o'ngga va yuqoriga qarab o'sib boradi.

Giperbolaning qolgan choraklardagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (5-shakl). Shunday qilib, giperbola ikki qismdan iborat bo'ladi. Bu qismlarga giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq'larga giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Giperbolada $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, $|A_1A_2|$ kesmaning $2a$ uzunligiga haqiqiy o'q, $|B_1B_2|$ kesmaning $2b$ uzunligiga mavhum o'q, a , b sonlarga mos ravishda haqiqiy va mavhum yaim o'qlar, $|F_1M|$, $|F_2M|$ kesmalarning r_1 , r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi. Bunda $\varepsilon > 1$, chunki $c > a$.

$b^2 = c^2 - a^2$ dan $\frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}$, ya'ni $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. Demak, ekstsentrisitet qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'ladi, ya'ni $\varepsilon \rightarrow 1$ da $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ va giperbola haqiqiy o'qi tomon siqilib boradi, aksincha ε kattalashgan sayin $\frac{b}{a}$ ham kattalashib, giperbolaning tarmoqlari kengayib boradi.

M nuqtadan d_1 va d_2 masofada o'tuvchi, tenglamalari $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ dan iborat to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deb ataladi. Direktrisalar ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Bu tengliklardan giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu

$$x > 0 \text{ bo'lganda } r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

$$x < 0 \text{ bo'lganda } r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

formulalar kelib chiqadi.

Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi.

Teng tomonli giperbola

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (3)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

$x^2 - y^2 = a^2$ tenglamani koordinata o'qlarini $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ burchakka burish orqali $y' = \frac{k}{x'}$, $k = \frac{a^2}{2}$ ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda asimptotalar koordinata o'qlaridan iborat bo'ladi. Demak, Ox va Oy o'qlar asimptota bo'lgan teng tomonli giperbola $y = \frac{k}{x}$ ko'rinishdagi tenglama bilan ifodalanadi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o'qida yotsa, u holda giperbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (4)$$

tenglama bilan aniqlanadi. Bunda giperbolaning eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{b}$ tenglik bilan, asimptotalari $y = \pm \frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan, direktrisalari $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan topiladi. (8) va (10) tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalarga qo'shma giperbolalar deyiladi.

Misol

Ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ nuqtadan o'tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasini tuzamiz. Uning yarim oqlari uzunligini, fokuslari koordinatalarini topamiz va asimptotalarining, direktrisalarining tenglamalarini tuzamiz.

Ma'lumki, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ yoki $c^2 = 2a^2$. Ikkinchi tomondan $c^2 = a^2 + b^2$.

Bundan $a^2 = b^2$. Demak izlanayotgan giperbola teng tomonli.

$M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ nuqtada giperbolada yotadi. Shu sababli $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} = 1$, ya'ni $a^2 = 1$. Demak, izlanayotgan giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolaning yarim o'qlari $a = b = 1$ uzunlikka, fokuslari $F_1(\sqrt{2}; 0)$, $F_2(-\sqrt{2}; 0)$ koordinatalarga ega bo'ladi.

Bu giperbolaning asimptotalari $y = \pm x$ tenglamalar bilan, direktrisalari

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

Misol

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

giperbolaning chap fokusi bilan bu giperbolaga qo'shma giperbolaning o'ng fokusi orasidagi masofani topamiz. Buning uchun $c^2 = a^2 + b^2$ tenglikdan foydalanamiz: $c^2 = 9 + 16 = 25$, $c = 5$. U holda berilgan giperbola uchun $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$ va qo'shma giperbola uchun $F'_1(0;5)$, $F'_2(0;-5)$ bo'ladi.

Bundan

$$|F_1F'_2| = \sqrt{(-5-0)^2 + (0-5)^2} = 5\sqrt{2}(u.b).$$

Parabola

2-ta'rif. Fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga parabola deyiladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo'lgan masofani p ($p > 0$) bilan belgilaymiz. p ga parabolaning parametri deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q direktrisaga perpendikulyar va fokusdan o'tadigan, $O(0;0)$ nuqta fokus va direktrisaning o'rtasida yotadigan qilib tanlaymiz.

Tanlangan koordinatalar sistemasida fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'ladi (2-shakl).

$M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M nuqtaning direktrisdagi proyeksiyasini N bilan belgilaymiz.

Parabolaning ta'rifiga ko'ra $|NM| = |MF|$.

Bundan

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

yoki

$$y^2 = 2px. \quad (5)$$

(5) tenglamaga parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Parabolaning shaklini uning (5) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(5) tenglikda y ning juft darajasi qatnashgani uchun parabola Ox o'qqa va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Shu sababli (5) tenglamani $x \geq 0, y \geq 0$ da tekshiramiz.

I-chorakda (5) tenglamadan $y = \sqrt{2px}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq 0$ va x koordinata 0 dan boshlab o'sishi bilan y koordinata ham o'sib boradi, ya'ni $x \rightarrow +\infty$ da $y \rightarrow +\infty$ ($M(x;y) \rightarrow \infty$). Shunday qilib, $y \geq 0$ bo'lganda $M(x;y)$ nuqta $O(0;0)$ nuqtadan chiqib x o'sishi bilan o'ngga va yuqoriga o'sib boradi. Parabolaning $y \leq 0$ dagi shaklini Ox o'qiga simmetrik qilib chizamiz (2-shakl). Bunda $O(0;0)$ nuqta parabolaning uchi, Ox o'q parabolaning o'qi deb ataladi.

Parabolaning ektsentrisiteti $\varepsilon = \frac{|NM|}{|MF|} = 1$ ga teng bo'ladi, direktrisasi $x = -\frac{p}{2}$ tenglama bilan aniqlanadi.

Misol

Uchi koordinatalar boshida yotgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi parabolaning kanonik tenglamasini tuzing:

1) Ox o'qqa ega, o'ng yarim tekislikda joylashgan va parametri $p=3$;

2) Ox o'qqa ega, chap yarim tekislikda joylashgan va parametri $p = \frac{1}{2}$;

3) Oy o'qqa ega, yuqori yarim tekislikda joylashgan va parametri $p = \frac{1}{4}$;

4) Oy o'qqa ega, quyi yarim tekislikda joylashgan va parametri $p=3$.

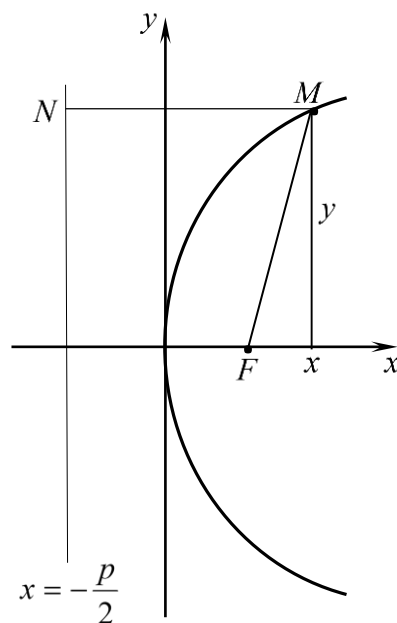
1) Ox o'qqa ega va o'ng yarim tekislikda yotuvchi parabola tenglamasi $y^2 = 2px$ bo'ladi.

Bundan

$$y^2 = 6x.$$

Keyingi parabolalarning tenglamalarini shu kabi topamiz:

$$2) y^2 = -x; \quad 3) x^2 = \frac{1}{2}y; \quad 4) x^2 = -6y.$$



2-shakl

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagilar berilganda giperbolaning kanonik tenglamacini yozing:

- 1) fokuslari orasidagi masofa 10, eksentrisitet $5/3$;
- 2) haqiqiy yarim o'q $\sqrt{20}$ va giperbola $N(-10; 4)$ nuqtadan o'tadi;
- 3) fokuslar orasidagi masofa 10, uchlari orasidagi masofa 4.

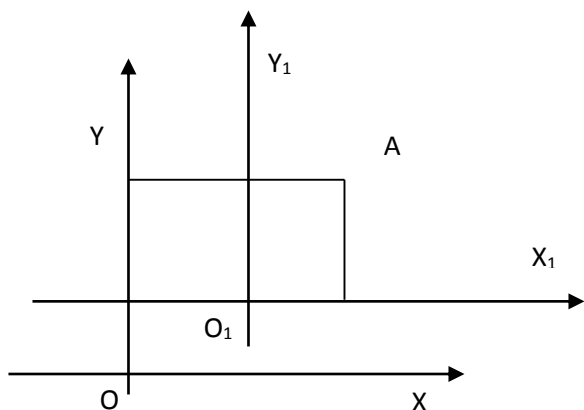
$144x^2 - 25y^2 = 3600$; 2) $9x^2 + y^2 = 144$ giperbolalar uchun o'qlarning uzunliklarini, fokuslarini va eksentrisitetini toping

13-mavzu. Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning mexanik konstruksiyalarga tatbiqlari.

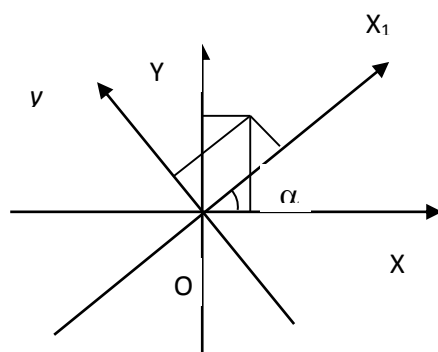
13.1. Dekart koordinatlarini almashtirish.

Ko'pgina amaliy va nazariy masalalarni yechishda Dekart koordinatlarining bir sistemasidan boshqa sistemasiga o'tishga to'g'ri keladi. Bunday holda tabiiyki nuqtaning koordinatlari ham, chiziqning tenglamasi ham o'zgaradi. Shunday masala tug'iladi: biror koordinatlar sistemasida nuqta berilgan bo'lsa, uning koordinatlarini boshqa sistemada qanday topish mumkin? Bunday masalalarni koordinatlarni almashtirish formulalari orqali yechish mumkin. To'g'ri burchakli Dekart koordinatlarni almashtirishning quyidagi ikkita xilini qaraymiz.

Koordinat o'qlarini parallel ko'chirish. A nuqta berilgan OXY koordinatlar sistemasida x, y (eski) koordinatlarga ega bo'lsin. Koordinatlar boshini $O_1(a, b)$ nuqtaga ko'chiramiz, bunda a, b lar yangi koordinatlar boshining eski OXY koordinatlar sistemasidagi koordinatlari bo'ladi. Yangi O_1X_1, O_1Y_1 koordinat o'qlarini mos ravishda OX, OY koordinat o'qlariga parallel qilib o'tkazamiz. A nuqtaning yangi koordinatlar sistemasidagi koordinatlari mos ravishda x_1, y_1 bo'lsin. Eski va yangi koordinatlar orasidagi bog'lanishni tekshiramiz. A nuqtadan OX, OY o'qlariga perpendikulyarlar o'tkazamiz (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

Bu holda

$$\begin{cases} x = a + x_1, \\ y = b + y_1 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x_1 = x - a, \\ y_1 = y - b \end{cases} \quad (1)$$

bo'ladi. (1) formulalarga koordinat o'qlarini parallel ko'chirish formulalari deyiladi.

1-misol. Koordinatlar o'qlarini parallel ko'chirganda, yangi koordinatlar boshi $O_1(-2,1)$ nuqtada bo'lsa, $A(3,5)$ nuqtaning yangi koordinatlarini aniqlang.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $a = -2, b = 1, x = 3, y = 5$ ekanligini hisobga olib, (1) formulaga asosan $x_1 = x - a = 3 - (-2) = 5, y_1 = y - b = 5 - 1 = 4$ bo'ladi. Demak, yangi koordinatlar sistemasida A nuqtaning koordinatlari $x_1 = 5, y_1 = 4$ bo'ladi.

Koordinatlar boshini o'zgartirmay koordinat o'qlarini α burchakka burganda koordinatlarni almashtirish. Eski OXY koordinatlar sistemasi- ni koordinatlar boshi O nuqta atrofida α burchakka burish bilan OX_1Y_1 holatga kelsin(2-chizma). A nuqtaning eski koordinatlari x, y yangi koordinatlari mos ravishda x_1, y_1 bo'lsin. Ma'lumki, ABC va OBE uchburchaklardan $x = OD = OE - DE = OE - BC = OB \cos \alpha - AB \sin \alpha$ chunki, $\cos \alpha = OE / OB$, $\sin \alpha = BC / AB$. Shunga o'xshash $y = AD = CD + AC = BE + AC = OB \sin \alpha + AB \cos \alpha$ bo'ladi. $OB = x_1, AB = y_1$, bo'lganligi uchun

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

formulani hosil qilamiz.(2) formulaga koordinat o'qlarini α burchakka burish bilan almashtirish formulasi deyiladi. (2) formulada birinchi tenglamani $\cos \alpha$ ga, ikkinchisini $\sin \alpha$ ga ko'paytirib, hadma-had qo'shsak,

$$x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash,

$$y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} \quad (3)$$

eski koordinatlardan yangi koordinatlarga o'tish formulasi bo'ladi.

2-misol. Koordinat o'qlari $\alpha = \frac{\pi}{6}$ burchakka burilgan. $A(\sqrt{3}, 3)$ nuqtaning yangi koordinatlarini toping.

Yechish. (3) formulaga asosan , $\alpha = \frac{\pi}{6}, x = \sqrt{3}, y = 3$ bo'lganligi uchun

$$x_1 = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 3 \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

$$y_1 = 3 \cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

bo'ladi.

Koordinatlarni almashtirishning mohiyati, chiziqlarni yoki ularning tenglamalarini tekshirishda ularni soddalashtirishdan iborat deyish mumkin. Masalan, $xy = k$ tenglama koordinata o'qlarini $\alpha = 45^\circ$ burchakka burish bilan (2) almashtirish

orqali $x_1^2 - y_1^2 = 2k$ teng tomonli giperbolaga o'tadi. Xaqiqatan ham,

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1,$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1$$

bo'lib, $xy = \frac{1}{2}(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = k$ yoki $x_1^2 - y_1^2 = 2k$ bo'ladi.

Ikkita x va y o'zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko'rinishda

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (4)$$

kabi yoziladi.

Bu tenglama aylana, ellips, giperbola va parabolalardan birini aniqlashini ko'rsatamiz. Buning uchun avval koordinata o'qlarini α burchakka burish orqali (4) tenglamada koordinatalar ko'paytmalari qatnashgan hadni yo'qotamiz, ya'ni bu tenglamani

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (5)$$

ko'rinishga keltiramiz.

Koordinata o'qlarini burish formulalari

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

yordamida eski koordinatalarni yangi koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, $x'y'$ oldidagi koeffitsiyent nolga aylansin, ya'ni

$$-2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

tenglik bajarilsin. Bundan

$$2B \cos 2\alpha = (A - C) \sin 2\alpha \quad (6)$$

yoki

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \quad (7)$$

Shunday qilib, koordinata o'qlarini (7) shartni qanoatlantiruvchi α burchakka burish (4) tenglamani (5) tenglamaga keltiradi.

Agar $A = C$ bo'lsa (6) ifoda ma'nosini yo'qotadi. Bu holda (6) tenglamaga ko'ra $\cos 2\alpha = 0$, ya'ni $\alpha = 45^\circ$ bo'lishi kerak. Demak, $A = C$ da koordinata o'qlarini 45° ga burish kerak bo'ladi.

1-teorema. (4) tenglama hamma vaqt yoki aylanani ($A = C$ da), yoki ellipsni ($A \cdot C > 0$ da), yoki giperbolani ($A \cdot C < 0$ da), yoki parabolani ($A \cdot C = 0$ da) aniqlaydi. Bunda ellips (aylana) uchun – nuqta yoki mavhum ellips (aylana), giperbola uchun – kesishuvchi chiziqlar juftligi, parabola uchun – parallel chiziqlar juftligi kabi buzilishlar bo'lishi mumkin.

Isboti. $A = C$ bo'lsin deylik.

U holda (5) tenglamadan topamiz:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Bundan

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

$$x^2 + 2\frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{A}\right)^2 + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}. \quad (8)$$

Bunda:

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0$ bo'lsa, u holda (4) tenglama markazi

$O_1\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ nuqtada joylashgan va radiusi $R = \sqrt{\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}}$ ga

teng aylanani aniqlaydi;

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} = 0$ bo'lsa, u holda (4) tenglama

$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglikni yagona $O_1\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$

nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Bunda «aylana nuqtaga buzilgan» deyiladi;

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} < 0$ bo'lsa, u holda (4) tenglama (mos ravishda (5)

tenglama) hech bir chiziqni aniqlamaydi. Bunda «aylana mavhum aylanaga buzilgan» deyiladi.

Teoremaning qolgan qismi shu kabi isbotlanadi.

Shunday qilib, (5) tenglama (mos ravishda (4) tenglama) ikkinchi

tartibli chiziqlardan birini aniqlaydi.

Misol $4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y - 89 = 0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq ko'rinishini aniqlaymiz. Berilgan tenglama giperbolani ifodalaydi, chunki $A \cdot C = 4 \cdot (-25) < 0$.

Tenglamada almashtirishlar bajaramiz:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 25(y^2 - 2y + 1) - 36 + 25 - 89 = 0, \quad 4(x - 3)^2 - 25(y - 1)^2 = 100,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Demak, berilgan tenglama $O(3;1)$ nuqtada joylashgan va yarim o'qlari $a=5$, $b=2$ ga teng bo'lgan giperbolani aniqlaydi.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu holda (4) tenglama ellipsni ifodalaydi.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$. Bu holda (4) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi. Ya'ni u bo'sh to'plamni ifodalaydi.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Bu holda (4) tenglamani faqat $O(0;0)$ nuqta qanoatlantiradi va u ikkita mavhum kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Bu holda (4) tenglama kesishuvchi bir juft to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu holda (4) tenglama giperbolani ifodalaydi.

6. $\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$. Bu holda (4) tenglama bir juft vertikal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

7. $\frac{x^2}{a^2} = -1 \Rightarrow x^2 = -a^2$. Bu holda (4) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi

8. $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Bu holda (4) tenglama bir juft ustma-ust tushgan vertikal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

9. $\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$. Bu holda (4) tenglama bir juft gorizontal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

10. $\frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2$. Bu holda (4) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi.

11. $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Bu holda (4) tenglama bir juft ustma-ust tushgan gorizontal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

12. $y^2 = 2px$. Bu holda (4) tenglama parabolani ifodalaydi.

(4) ko'rinishdagi umumiy tenglamaning A, B va C koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

determinant xarakteristik determinant deyiladi.

Agar (4) tenglamada $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda tenglama elliptik turdagi tenglama deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 1-3 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (4) tenglamada $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda tenglamani giperbolik turdagi tenglamada deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 4-5 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (4) tenglamada $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda tenglama parabolik turdagi tenglama deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 6-12 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

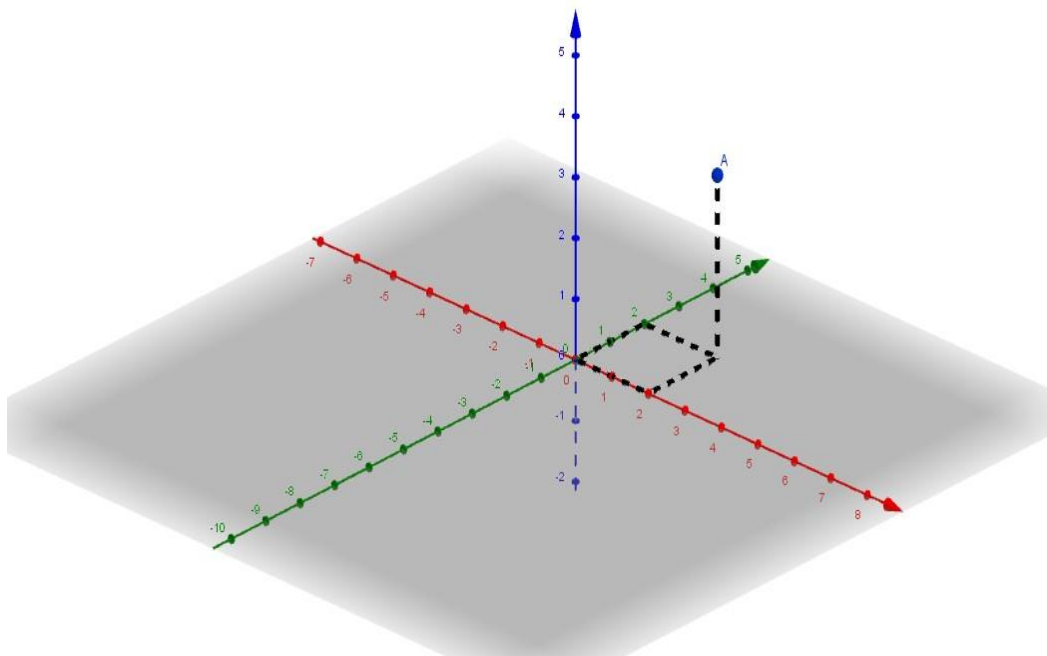
Mustaqil yechish uchun misollar

1. $A(1, 2)$ nuqta koordinata boshini 3 birlik o'nga va 2 birlik pastga parallel ko'chirish natijasida qanday ifodalanadi?
2. Koordinata boshini 45° gradusga burish natijasida yangi koordinata qanday ko'rinishga keladi.
3. $yx=5$ giperbolani kanonik ko'rinishga keltiring?
4. $xy=-1$ giperbolani kanonik ko'rinishga keltiring?

14.mavzu.Tekislik tenglamalari,ularning xususiy hollari.Tekislikni yasash.Tekisliklar orasidagi burchak.

Biz tekislikda analitik geometriyaning asosiy tushunchalari va sodda masalalari bilan shug'ullandik. Ma'lumki, bizni o'rab turgan borliq (uch o'lchovli fazo) bo'lib, bizga ko'rinib turgan real jismlar shu fazoda ma'lum bir o'rinni egallaydi. Fazoda ularning holatini aniqlash uchun xuddi tekislikdagi kabi Dekart koordinatalar sistemasi kiritiladi. Bizga masshtab birligi bilan berilgan o'zaro perpendikulyar hamda bitta O nuqtada kesishuvchi Ox , Oy , Oz to'g'ri chiziqlar sistemasi berilgan bo'lsin. Odatda bu sistema fazoda Dekart koordinatalar sistemasi deyiladi va $Oxyz$ kabi belgilanadi.

O nuqta koordinatalar boshi, Ox –abstsissalar o'qi, Oy –ordinatalar o'qi, Oz –applikatalar o'qi deyiladi. Fazoda biror A nuqtaning holati uning Ox , Oy , Oz o'qlarga proektsiyalari $-(x, y, z)$ uchlik bilan to'la aniqlanadi.



2. Ikki nuqta orasidagi masofa Fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va

$A(x_1, y, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalar orasidagi masofani topamiz. A_1 va B_1 nuqtalar mos ravishda A va B ning Oxy tekislikdagi proektsiyalari bo'lsin. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ bo'ladi. A nuqtadan A_1B_1 kesmaga parallel chiziq o'tkazib, uni B_2 bilan belgilaymiz. U holda BB_2 kesmaning uzunligi $z_2 - z_1$ ga teng.

3. Fazoda tekislik va uning tenglamasi

Faraz qilaylik, fazoda Dekart koordinatalar sistemasi,

$P(a_1, b_1, c_1)$ hamda $Q(a_2, b_2, c_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

Bu ikki nuqtadan bir xil masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni tekislikni

ifodalaydi. Bu tekislikda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani olaylik. Ikki nuqta orasidagi masofani

topish formulasiga ko'ra

$$MP = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2}$$

$$MQ = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

bo'ladi. Agar $MP = MQ$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2} = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshiramiz:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + x^2 + y^2 + z^2 &= \\ &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Bu tenglikni quyidagicha ham yzish mumkin.

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + 2(c_2 - c_1)z +$$

$$+ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 = 0$$

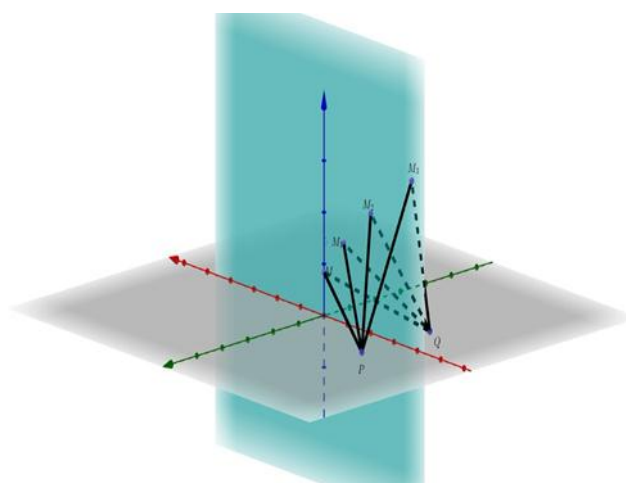
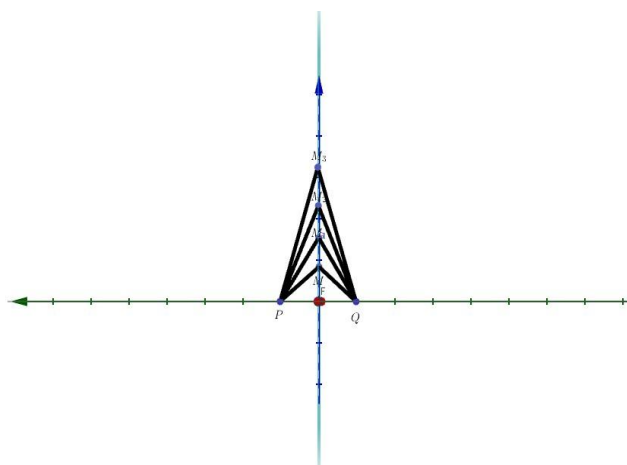
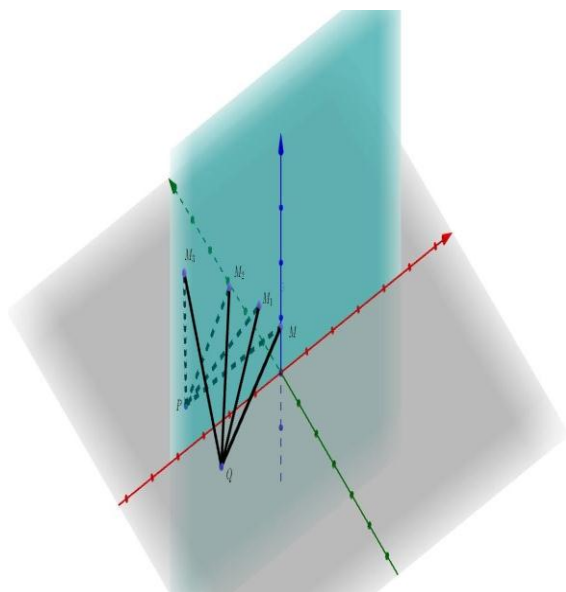
$A = 2(a_2 - a_1)$, $B = 2(b_2 - b_1)$, $C = 2(c_2 - c_1)$,

$D = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2$ belgilashlarni kiritsak,

ushbu

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tenglamaga kelimiz. (1) tenglama fazoda tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.



Bu yerda A, B, C, D o'zgarmas sonlar bo'lib, ular tekislikning fazodagi vaziyatini to'la aniqlaydi.

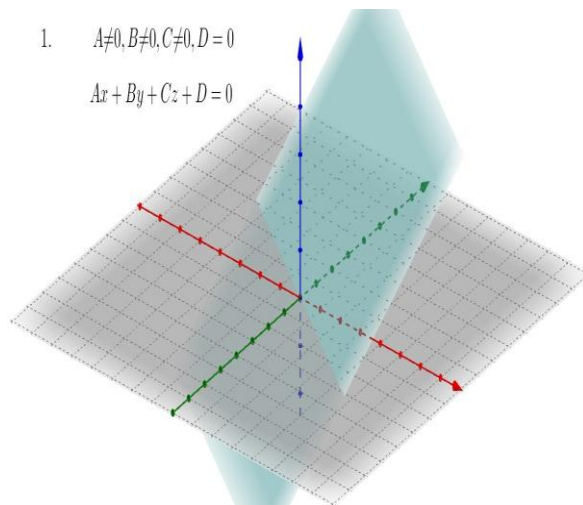
Endi (1) tenglamaning xususiy hollarini qaraylik.

1°. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$ bo'lsin.

U holda $Ax + By + Cz = 0$ tenglama hosil bo'lib, bu tenglama bilan aniqlangan tekislik koordinatalar boshi

$O(0,0,0)$ nuqtadan o'tadi.

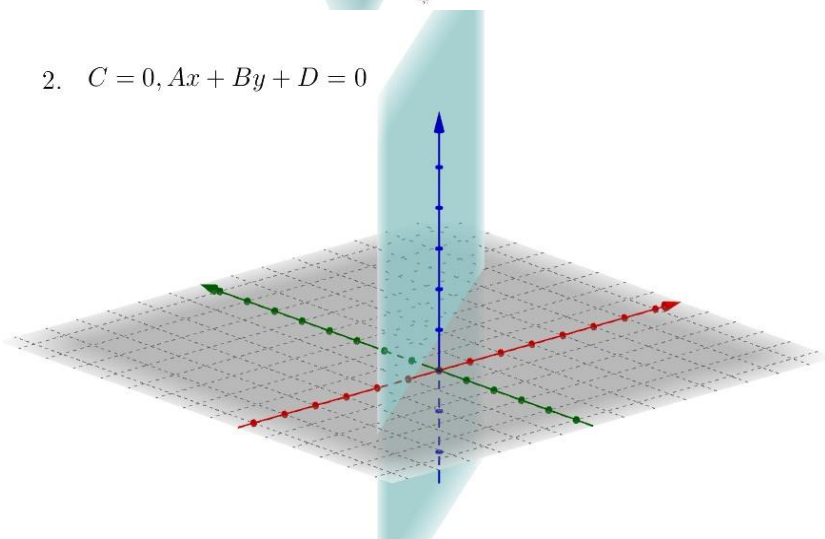
1. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$
 $Ax + By + Cz + D = 0$



2°. $A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0, C = 0$.

Bu holda biz $Ax + By + D = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama bilan aniqlangan tekislik Oz o'qiga parallel tekislikdir.

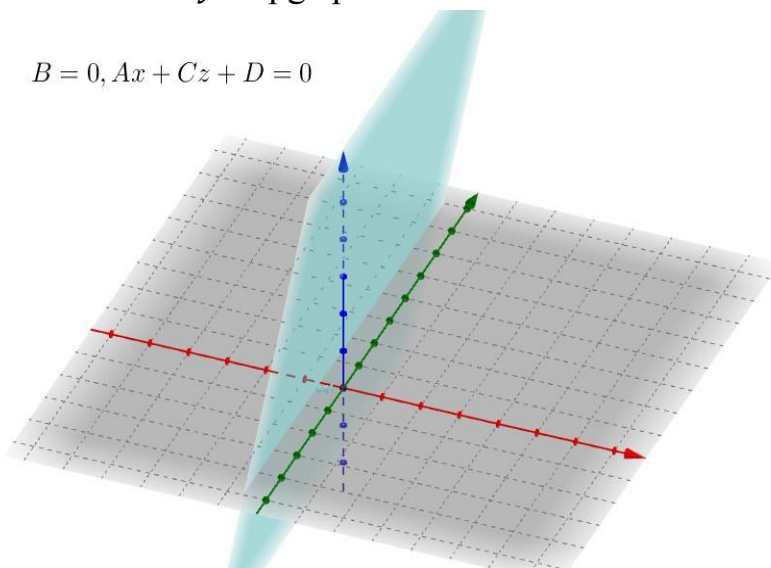
2. $C = 0, Ax + By + D = 0$



3°. $A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0, B = 0$.

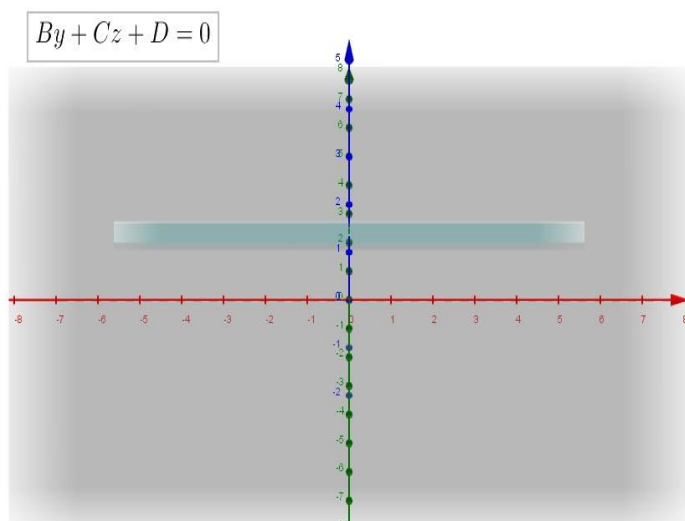
Bu holda $Ax + Cz + D = 0$ tekislik Oy o'qiga parallel tekislikdir.

$B = 0, Ax + Cz + D = 0$

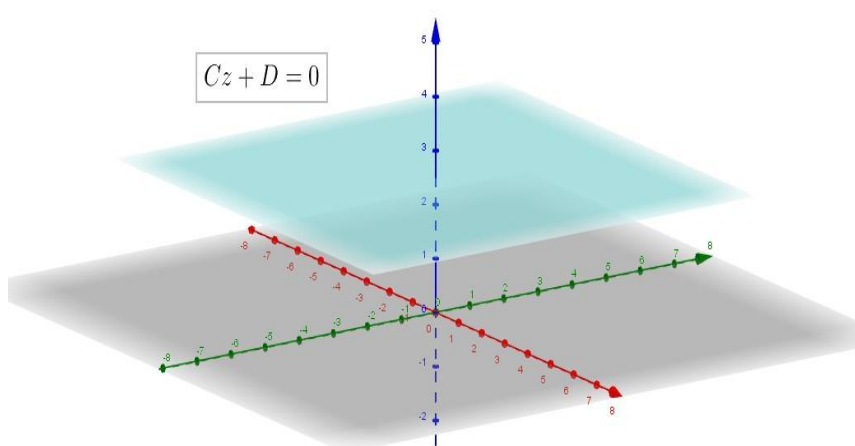


4°. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$,

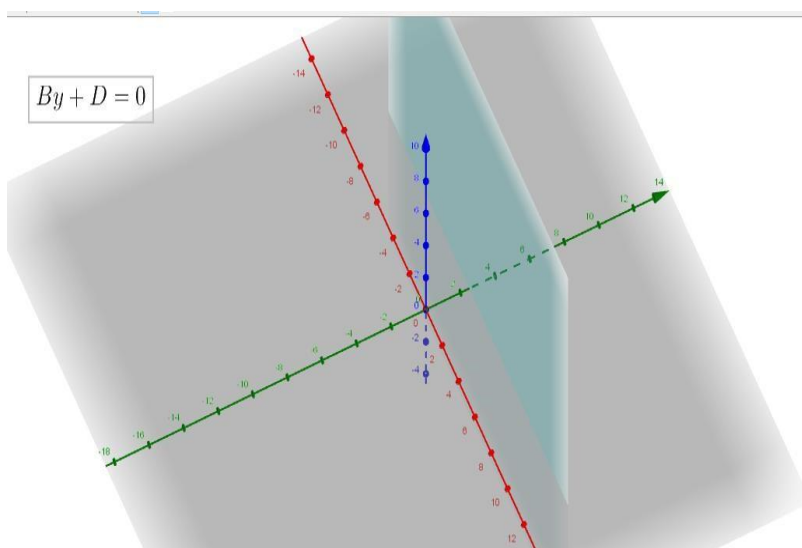
Bu holda $By + Cz + D = 0$ tekislik Ox o'qiga parallel tekislikdir.



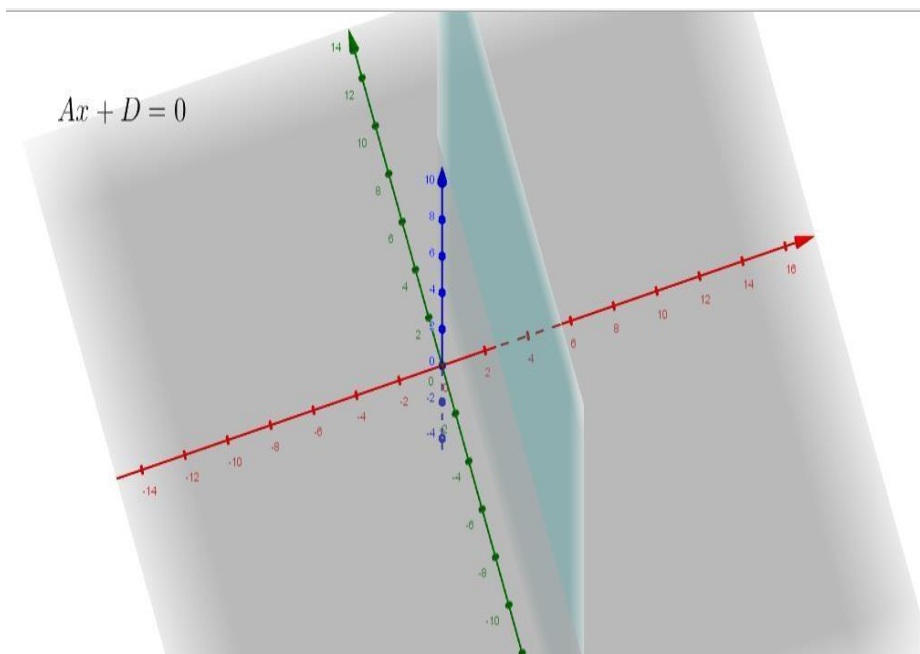
5°. $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$. U holda (1) tenglama $Cz + D = 0$ ko'rinishga ega bo'lib, u Oxy kordinatalar tekisligiga parallel tekislikdir.



6°. $A = 0, C = 0, B \neq 0, D \neq 0$. U holda (1) tenglama $By + D = 0$ ko'rinishga ega bo'lib, u Oxz kordinatalar tekisligiga parallel tekislikdir.



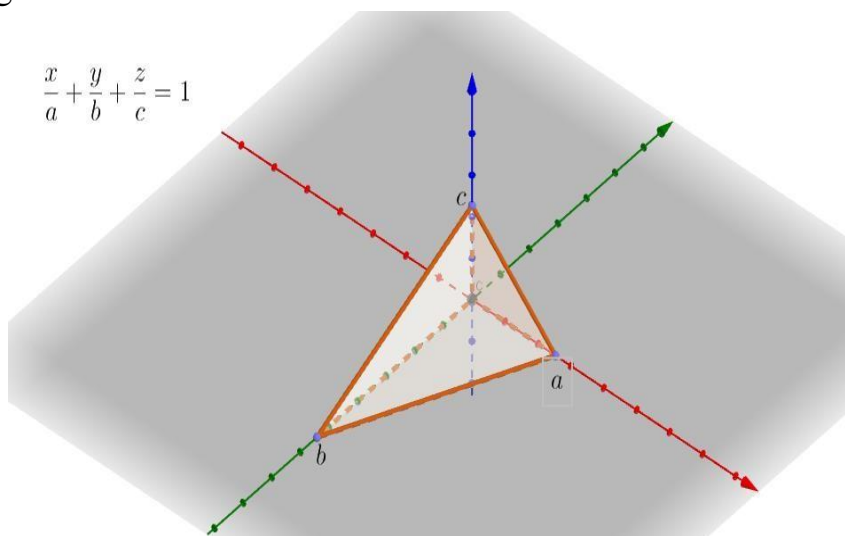
7°. $B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$. U holda (1) tenglama $Ax + D = 0$ ko'rinishga ega bo'lib, u Oyz kordinatalar tekisligiga parallel tekislikdir.



Tekislikning o'qlardan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

ko'rinishga ega.



Fazoda

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = 0 \quad (3) \text{ tenglamalar}$$

bilan aniqlangan T_1 va T_2 tekisliklar berilgan bo'lsin. Bu ikki tekislik parallel bo'lishi uchun

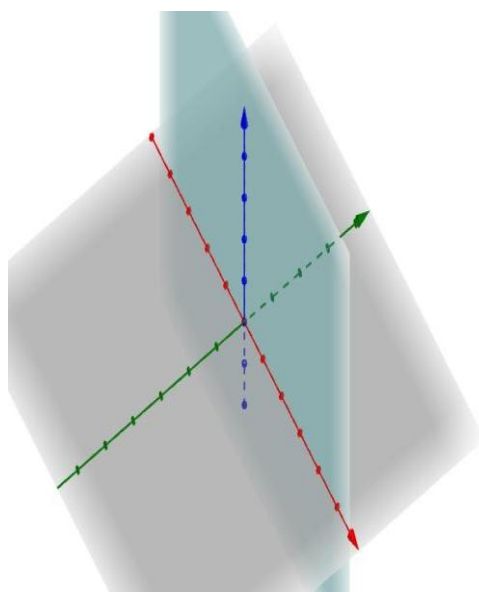
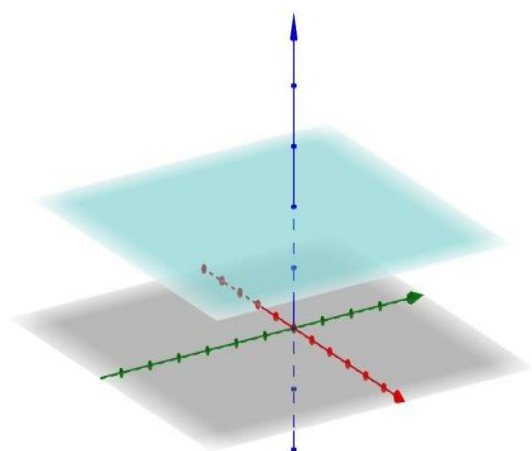
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.

T_1 va T_2 tekisliklar perpendikulyar bo'lishi uchun

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

shart bajarilishi zarur va yetarli.



Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta $P_1(x_1, y_1, z_1)$,

$P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini keltirib chiqarish mumkin. Bu tenglama

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

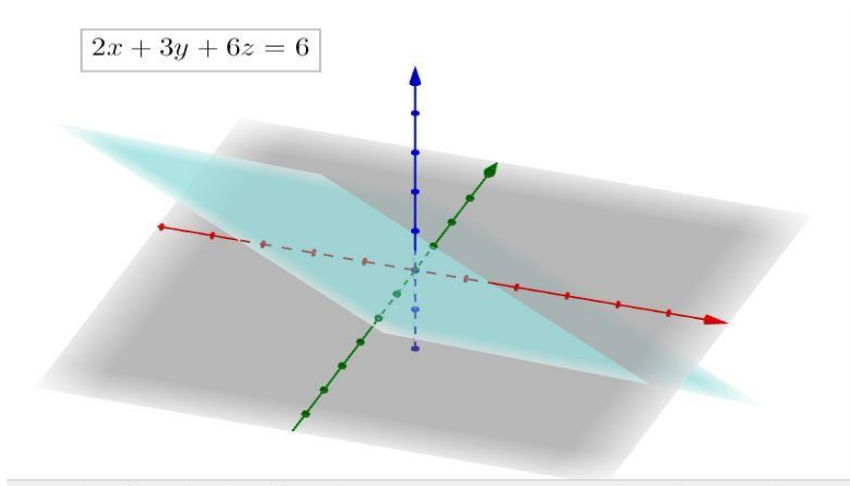
ko'rinishda bo'ladi.

(4) formulaga ko'ra

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 2-0 & 0-0 \\ 3-0 & 0-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu determinantni hisoblab topamiz

$$2x + 3y + 6z = 6$$



15-mavzu. Fazoda to'g'ri chiziq va uning parametrli va kanonik tenglamalari.

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislikning fazoda o'zaro joylashishi

Ikki tekislik orasidagi burchak. Nuqtadan tekislikkacha masofa.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tekisliklar orasidagi burchak ularning normal $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi. (1) ga ikkita tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lsa,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo'lib, bu ikki tekislikning parallellik sharti deyiladi..

$\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normal vektorlar perpendikulyar bo'lsa,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

bo'lib, bu ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti bo'ladi. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2)$$

formula bilan topiladi.

1-misol. $x + 2y - 3z + 4 = 0$ va $2x + 3y + z + 8 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $n_1 (1, 2, -3)$ va $n_2 (2, 3, 1)$ mos ravishda berilgan tekisliklarning normal vektorlari bo'lganligi uchun (1) formulaga asosan,

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}, \quad \varphi \approx 69^\circ 05'$$

bo'ladi.

2-misol. $2x - y - 2z + 4 = 0$ va $2x - y - 2z - 8 = 0$ tekisliklarning paralleligini ko'rsating va ular orasidagi masofani toping.

Yechish. Berilgan tekisliklarning normal vektorlari $n_1 (2, -1, -2)$ va $n_2 (2, -1, -2)$ parallellik shartini qanoatlantiradi, demak berilgan tekisliklar ham paralleldir. Endi birinchi tekislikda biror nuqtani aniqlab undan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofani topamiz. $x = z = 0$ bo'lsa, birinchi tekislik tenglamasidan $y = 4$ bo'lib, $M_0 (0; 4; 0)$ nuqta birinchi tekislikdagi nuqta bo'ladi. (2) formulaga asosan,

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 8|}{\pm \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12|}{3} = 4.$$

Demak, parallel tekisliklar orasidagi masofa $d = 4$ bo'ladi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Fazoda ikkita to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo'lib,

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (3)$$

formula yordamida topiladi.

Berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

bo'lib, bu fazoda ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti deyiladi.

To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, yo'naltiruvchi vektorlar ham perpendikulyar bo'lib,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \quad (5)$$

bo'ladi, bu ikki to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidir.

3-misol. $\frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{1} \quad \text{va} \quad \frac{x-8}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-4}{-1}$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Oldin to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini topamiz:

$$\vec{s}_1 = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{s}_2 = 7\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng. (3) formulaga asosan:

$$\cos \varphi = \frac{7 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{28}{15\sqrt{22}} \approx 0.3127,$$

$$\cos \alpha \approx 0.3127.$$

Jadvaldan $\varphi \approx 71^{\circ}48'$ ekanligini topamiz.

4-misol. $M_0 (2, -1, 3)$ nuqtadan o'tib,

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{4}$$

to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori uchun berilgan to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektorini olish mumkin, chunki ular shartga ko'ra

parallel, ya'ni $\vec{s} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Berilgan nuqtadan o'tib,

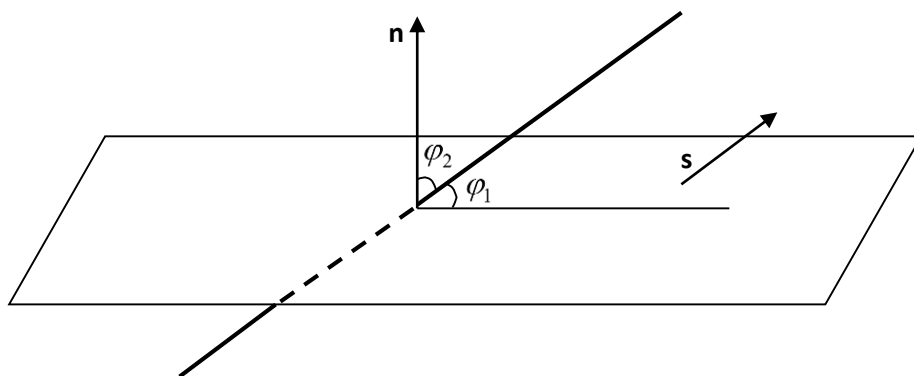
→

$\vec{s}$ yunaltiruvchi vektorga ega bo'lgan, izlanayotgan to'g'ri chiziqli tenglamasi (3) ga asosan,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

bo'ladi.

Fazoda to'g'ri chiziqli va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqli va tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziqli tekislikdagi proeksiyasi bilan to'g'ri chiziqli orasidagi qo'shni burchaklardan biri olindi (1-chizma).



1-chizma.

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

To'g'ri chiziqli kanonik tenglamasi bilan

tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. φ_1

burchakni topish uchun to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$

vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi φ_2 burchakni hisoblaymiz:

$$\cos \varphi_2 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

φ_1 burchak φ_2 burchakni $\pi/2$ gacha to'ldiradi. Demak,

$$\cos \varphi_2 = \cos (\pi/2 - \varphi_1) = \sin \varphi_1$$

Shunday qilib,

$$\sin \varphi_1 = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + p^2 + n^2}} \quad (6)$$

bo'ladi. (6) fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo'ladi.

To'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar perpendikulyar bo'lib,

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (7) tenglikka to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik sharti

deyiladi. To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, $\vec{s}(m, n, p)$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlar parallel bo'ladi va

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (8)$$

munosabat kelib chiqadi. (8) tenglik to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti bo'ladi.

(7) shart bajarilmasa to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Kesishish nuqtasini topish uchun, ushbu

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish kerak bo'ladi.

5-misol. $A(5, 1, -4)$ va $B(6, 1, -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan $2x - 2y + z - 3 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. AB nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{s} = \vec{AB}(1, 0, 1)$ ni olamiz. Tekislikning normal vektori $\vec{n}(2, -2, 1)$ bo'lganligi uchun (10) formulaga asosan:

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{2}/2, \quad \varphi = 45^\circ.$$

6 – misol.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0, \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqni yasang.

Yechish. Ma'lumki to'g'ri chiziqni yasash uchun u o'tadigan ikkita nuqtani aniqlash yetarli. Buning uchun to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu nuqtalarga to'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari deyiladi.

To'g'ri chiziqning XOY tekislikdagi izini topish uchun berilgan sistemada $z = 0$ deb olamiz, ya'ni

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemani x, y noma'lumlarga nisbatan yechsak, $x = 2, y = 1$ bo'ladi.

Demak, berilgan to'g'ri chiziqning XOY koordinata tekisligidagi izi $M_1 (2, 1, 0)$ nuqta bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izini topamiz. Buning uchun berilgan tenglamalar sistemasida $y = 0$ deb, hosil bo'lgan sistemani yechib, $x = 2, z = 1$ topamiz. Demak, to'g'ri chiziqning XOZ tekislikdagi izi $M_2 (2, 0, 1)$ bo'ladi. Topilgan M_1 va M_2 nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $2x - y - 2z + 3 = 0$ va $x + y - 5 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
2. $M_0 (2, 4, -3)$ nuqtadan o'tib, $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini yozing.
3. $M (1, -4, -5)$ nuqtadan $6x - 3y - 6z + 7 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

4. $2x - 11y + 10z - 15 = 0$ va $2x - 11y + 10z + 45 = 0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

5. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ va $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

6. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$ va $\begin{cases} -3y + z - 5 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

to'g'ri chiziqlarning parallelligini ko'rsating.

7. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-1}$ va $\begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0, \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases};$

to'g'ri chiziqlarning o'zaro perpendikulyarligini ko'rsating.

8. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{1}$ to'g'ri chiziq va $4x + 2y + 2z + 5 = 0$

tekislik orasidagi burchakni toping.

9. $A(3, 6, 2)$ va $B(4, 5, -2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq va $2x + y - 2z - 5 = 0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

10. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2 = 0, \\ x + 2y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $2x - 7y + 12z - 15 = 0$ tekislikning parallelligini ko'rsating.

16-mavzu. Silindrik sirtlar, sfera, ellipsoid, giperboloid va paraboloidlar. Analitik geometriyaning konstruktiv masalalarga tatbiqlari

Sirt va uning tenglamasi. Berilgan to'g'ri burchakli dekart kordinatlari sistemasida koordinatalari

$$F(x; y; z) = 0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni sirt deb ataladi. (1) tenglama umuman sirt tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama x, y, z o'zgaruvchilarning

briga nisbatan yechiladi deb faraz qilamiz. Masalan, u tenglama z ga nisbata yechilishi mumkin bo'lsin, bu holda

$$z=f(x,y) \quad (2)$$

deb yozish mumkin, bunda $f(x,y)$ – x,y o'zgaruvchilarning funksiyasidir.

Sirtga berilgan yuqoridagi ta'rifga ko'ra sirt tenglamasi deb uch o'zgaruvchili shunday $f(x,y,z)=0$ yoki $z=f(x,y)$ tenglamaga aytiladiki, bu tenglamani sirtida yotgan har bir nuqtaning koordinatalari qanoatlantiriladi. Shunday qilib fazodagi nuqtalarning geometrik o'rni deb qaralgan har qanday sirt, bu nuqtalar koordinatalarini o'zaro bog'lovchi (1) tenglama bilan tasvirlanadi.

Aksincha, x ; y ; z ; o'zgaruvchilarni bog'lovchi har qanday (1) tenglama koordinatalari, bu tenglamani qanoatlantiradigan fazodagi nuqtalarning geometrik o'rnini, ya'ni sirtini aniqlaydi.

Fazodagi sirtni tekshirish ikkita asosiy masalani tekshirishga olib kelinadi;

1. Fazodagi biror sirt o'zining umummiy xossasi bilan nuqtalarining geometrik o'rni, deb berilgan. Uning tenglamasini tuzish kerak.
2. Fazodagi biror sirtning tenglamasi berilgan. Bu tenglama yordamida uning xossalarini va shaklini tekshirish kerak.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida o'zgaruvchi x ; y ; z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0 \quad (3)$$

algebraik tenglama bilan tasvirlangan sirtlar ikkinchi tartibli sirtlar deb ataladi. Bu tenglamada A, B, C, D, E, F koeffisientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak.

Sfera. Ma'lumki fazoda markaz deb ataluvchi $O(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni sfera deb ataladi. Markazdan sferagacha bo'lgan masofa uning radiusi deyiladi. Ta'rifga ko'ra $O(x_1, y_1, z_1)$

nuqtadan sfera ustidagi ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtagacha bo'lgan masofa R radiusi bo'lib, u qo'yidagicha hisoblanadi:

$$R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \text{ yoki } (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2 \quad (5).$$

Endi (5) tenglamada qavslarni ochamiz $x^2+y^2+z^2-2x_1x-2y_1y-2z_1z+x_1^2+y_1^2+z_1^2-R^2=0$. Bu x, y, z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamadan iborat.

Misol. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ tenglama sfera tenglamasi ekanligini isbotlang. Uning markazi va radiusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonini qo'yidagicha shakl almashtiramiz: $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+6z+9)-14-2=0$ yoki $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16$. Bu esa markazi $O(1; -2; -3)$ nuqtada, radiusi esa $R=4$ ga teng bo'lgan sfera tenglamasidir.

Silindrik sirtlar

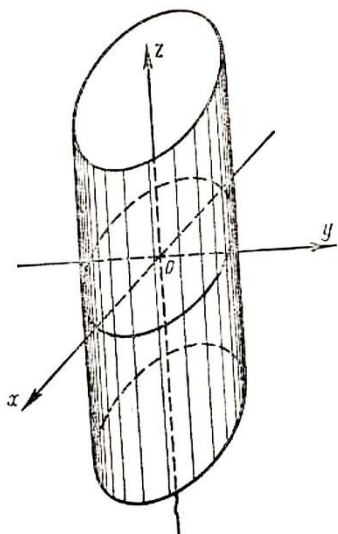


1-chizma

Berilgan l to'g'ri chiziqqa parallel va L chiziqni kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt silindrik sirt deb ataladi. Bunda L chiziq silindrik sirtning yo'naltiruvchisi, l to'g'ri chiziq esa uning yasovchisi deyiladi (1-chizma).

To'g'ri burchakli dekart koordinatlari sistemasida $f(x,y)=0$ (6) tenglama yasovchisi oz o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtni ifoda qiladi. Shunga ko'ra $f(x, z)=0$ tenglama yasovchi oy o'qqa parallel silindrik sirtni va $t(y, z)=0$ esa yasovchisi ox o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtni ifoda qiladi.

Misollar:



2-chizma

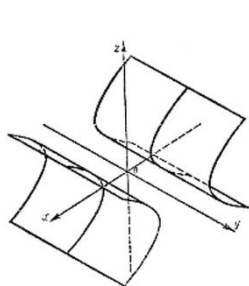
1. Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama bilan aniqlangan sirt elliptik silindir deb ataladi. Uning yasovchisi oz o'qiga parallel, yo'naltiruvchisi yarim o'qlari a va b bo'lgan xoy tekislikda yotuvchi ellispdan iborat. Xususiyl holda $a=b$ bo'lsa to'g'ri doiraviy silindirga ega bo'lamiz. Uning tenglamasi $x^2+y^2=a^2$ (8) ko'rinishda bo'ladi (2-chizma).

2. Ushbu

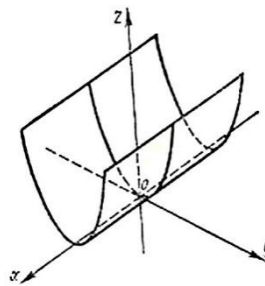
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt giperbolik silindir deb ataladi. Bu sirtning yasovchi oy o'qqa parallel, yo'naltiruvchi esa oxz tekislikda joylashgan, haqiqiy yarim o'qi a va mavhum yarim o'qi b ga teng bo'lgan giperboladir (3-chizma).

3. Ushbu $y^2=2pz$ tenglama bilan aniqlangan silindirik sirt parabolik silindir deb ataladi. Bu sirtning yasovchisi ox o'qqa parallel bo'lib yo'naltiruvchisi esa paraboladan iborat bo'ladi (4-chizma).



3-chizma.



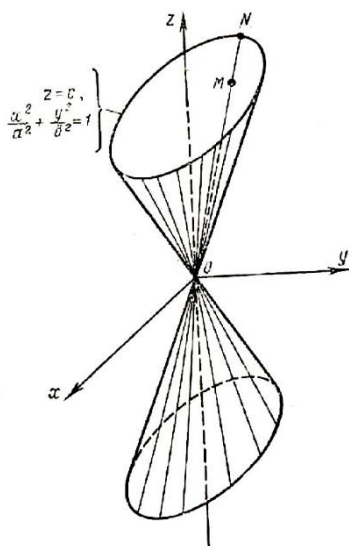
4-chizma.

Esltama. Bizga ma'lumki, fazoda to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishishdan hosil bo'ladi. Xuddi shuningdek fazoda egri chiziq ikki sirtning kesishish natijasida hosil bo'ladi va u ikki $F(x;y;z)=0$, $f(x,yz)=0$ tenglamaning berilishi bilan aniqlanadi.

Masalan, S aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2+z^2=25$ sirlarning kesishishi natijasida hosil bo'ladi va u

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \quad (11)$$

sistema orqali beriladi.



5-chizma

Ikkinchi tomndan, bu aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2=16$ silindirik sirlarning kesishish chizig'i deb ham qaralishi mumkin. Bu holda S aylana

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \quad (12)$$

sistema orqali beriladi. Ko'rinib turibdiki, (11) va (12) sistemalar teng kuchlidir.

Sirlarning shakli va ulchamlarini o'rganishda ularni koordinat tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish va

keimda hosil bo'lgan chiziqlarning koordinata

tekisliklariga proyeksiyalarni qarash muhim ahamiyatga ega.

Konus sirt

Berilgan L chiziqini kesuvchi va berilgan P nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt konus sirt deb ataladi. Bunda L chiziq konus sirtning yunaltiruvchisi, konus sirtini tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarning har biri unng yasovchisi, P esa konus sirtning uchi deyiladi (5-chizma).

Misol uchun uchi koordinata boshida, yo'naltiruvchi esa $z=c$ tekislikda yotuvchi va yarim o'qlari a va b lar bo'lib

$$\begin{cases} z = c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (13).$$

ellipsdan iborat bo'lgan konus sirtini qaraymiz. Bu sirt ikkinchi tartibli konus deyiladi.

Ellipsoid

Ushbu

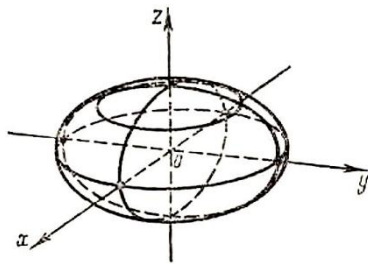
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (14)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt ellipsoid deb ataladi. a, b, c sonlar ellipsoidning yarim o'qlari deb ataladi. Bu tenglamada x;y;z o'zgaruvchi koordinatalar juft darajada qatnashganligi uchun ellipsoid koordinata tekisliklariga simmetrik joylashgan bo'ladi. Ellipsoidning formasini tasavvur qilish uchun uni koordinata tekisliklar bilan

kesamiz. Masalan, (14) ellipsoidni oxy tekislikka paralel bo'lgan $z=h$ tekislik bilan kessak kesimda ellipsis hosil bo'ladi. Haqiqatan

$$\left. \begin{array}{l} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{array} \right\}$$

tenglamalardan z ailikatani chiqarsak



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

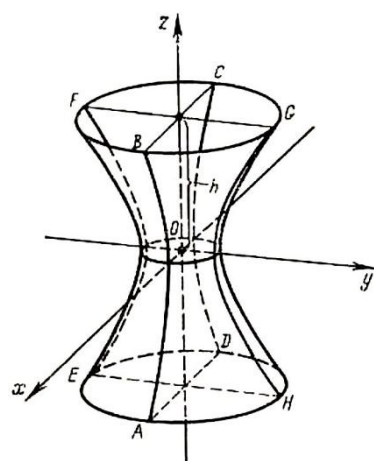
chiziq hosil bo'ladi. Bundan

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

6-chizma.

hosil bo'ladi. Bu esa yarim o'qlari qavs ichida turgan sonlardan iborat bo'lgan ellipsdan iboratdir. Ellipsoid boshqa koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish natijasida kesimda ellipslar hosil bo'lishini ko'rish qiyin emas. Ellipsoid 6-chizmada tasavirlangan ko'rinishga ega.

Ko'rinish turibdiki, ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kessak ham kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Xusussiy holda $a=b$ bo'lsa (14) tenglama ellipsoidni, $a=b=c$ bo'lsa sferani ifoda etadi.



7-chizma.

Giperboloidlar

Bir pallali giperboloid

Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt bir pallali giperboloid deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $y=0$ tekislik bilan kessak, Oxz tekislikda yotadigan ABCD giperbola hosil bo'ladi. Uning tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Xuddi shuningdek bir pallali giperbolaidni $x=0$ tekislik bilan kessak kesimda EFGH giperbola hosil bo'lib unming tenglamasi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

dan iborat bo'ladi (7-chizma).

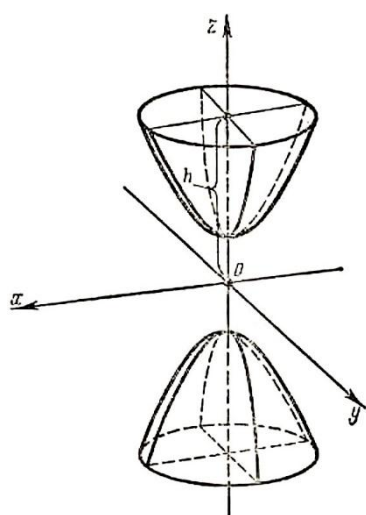
Bir pallali giperbolaidni $z=h$ tekislik bilan kesilsa teng-lamasi qo'yidagi ko'inishda bo'lgan BFCG ellips hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad (18)$$

Agar $h=0$ bo'lsa eng kichik yarim o'qlara ega bo'lgan oxy tekislikda yotuvchi ellips hosil bo'ladi.

Ikki pallali giperboloid.

Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt ikki pallali giperboloid deyiladi. Koordanata tekisliklari ikki pallali giperboloid



uchun simmetriya teiksliklaridan iborat. Bu sirtni oxz va oyz tekisliklari bilan kesilsa mos ravishda quyidagi giperbollar hosil bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

8-chizma.

Bu giper bolalar 8-chizmada tasvirlangan.

Agar ikki pallali giperbolaidni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} &= 1 \\ Z &= h \end{aligned} \right\}$$

tenglama bilan ifodalanuvchi ellipsis hosil bo'ladi.

Paraboloidlar

Elliptik paraboloid.

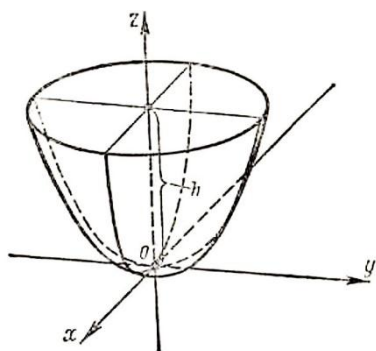
Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (20)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt elliptik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada p va q lar bir xil ishorali deb hisoblanadi. Aniqlik uchun $p>0, q>0$ deb olinadi.

Elliptik parabolaidni oxz va oyz koordinata tekisliklari bilan kesish natijasida kesimda mos ravishda

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{x^2}{2p} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{y^2}{2q} \\ x &= 0 \end{aligned} \right\}$$



9-chizma

parabolalar hosil bo'ladi. Agar elliptik paraboloidni $z=h$ ($h>0$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} &= 1 \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ellips hosil bo'ladi. Uning yarim o'qlari $a = \sqrt{2ph}$ $b = \sqrt{2qh}$ bo'ladi (9-chizma).

Agar $p=q$ bo'lsa,

$$2pz = x^2 + y^2 \quad (22)$$

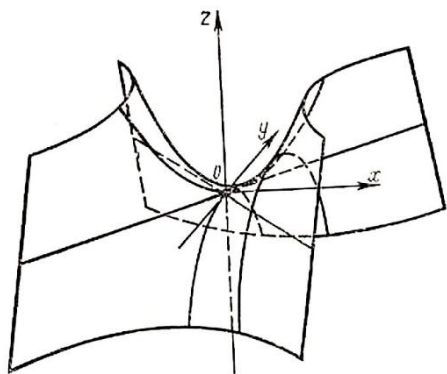
aylanma parabolaidga ega bo'lamiz.

Giperbolik parabolaid

Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad (23)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt giperbolik parabolaid deb ataladi. Aniqlik uchun $p>0$, $q>0$ deb hisoblandi. Bu sirtni oxz tekislik bilan kesilsa, natijada



$$2pz = x^2, y=0 \quad (24)$$

parabola hosil bo'ladi (10 chizma).

10-chizma.

Agar giperbolaidni $x=h$ tekislik bilan kesilsa

$$\left. \begin{array}{l} 2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \\ x = h \end{array} \right\} \text{ yoki } \left. \begin{array}{l} 2q(z - \frac{h^2}{2p}) = -y^2 \\ x = h \end{array} \right\} \quad (25)$$

parabola hosil bo'ladi.

h ning har xil qiymmatlarda oyz tekislikka parallel bo'lgan tekisliklarda yotuvchi parabolalar oilasiga ega bo'lamiz.

Giperbolik parabolaidni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{array} \right\} \quad (26)$$

chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziq haqiqiy o'qi $z=h$ tekislikda, $h>0$ bo'lganda, ox o'qqa parallel giperbolani, $h<0$ bo'lganda, esa haqiqiy o'qi oy uqqa parallel

giperbolani tasvirlaydi. $h=0$ bo'lganda (26) tenglama $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ ko'rinishni oladi.

Bu tenglama esa $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ va $\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ tenglamalarga ajraladi. Bular koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamalaridir.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$ ellipsoidni $x=0$ tekislik bilan kesildi. Hosil bo'lgan chiziq tenglamasini tuzing.

2. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{16} = 1$ ellipsoidni $y=0$ tekislik bilan kesildi. Hosil bo'lgan chiziq tenglamasini tuzing.

3. $A(2, 4, 8)$ nuqta va $z=0$ tekislikdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rnini toping?

4. $x - \frac{z^2}{16} = 0$ va $x=4$ tekislikni kesishishi natijasida nima hosil bo'ladi?

17-mavzu. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari, aniqlanish sohasi, grafigi. Elementar funksiyalar, murakkab funksiya. Ketma-ketlik va uning limiti.

O'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining diametriga nisbati bir xil π sonidan iborat bo'ladi. Bu holda nisbat o'zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga o'zgaruvchi miqdorlar deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o'zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko'plab keltirish mumkin. Hamma o'zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o'rganib bo'lmaydi. Endi ikkita o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishni qaraymiz.

Funksiya tushunchasi. Funksiya tushunchasi matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko'p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo'lgan to'plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. $x \in X$ to'plamda, $y \in Y$ to'plamda o'zgarsin.

Ta'rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo'yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo'yilsa, X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = x^f$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to'plamga funksiyaning aniqlanish sohasi, Y to'plamga o'zgarish sohasi yoki qiymatlar to'plami deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D , qiymatlar to'plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu moslikka X to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga erkli o'zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o'zgaruvchi yoki x ning funksiyasi deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo'lishi uchun: 1) X to'plam berilishi kerak (ko'p hollarda uni x bilan Y o'zgaruvchilarning bog'lanishiga ko'ra topiladi); 2) x o'zgaruvchining X to'plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo'yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta'rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) $f: X = (-\infty, +\infty)$ to'plamga tegishli bo'lgan har bir songa uning o'zini o'ziga ko'paytirib, ya'ni kvadratga ko'tarib mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo'ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyaning ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$ bo'ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping. Yechish. Ma'lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to'plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo'lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x - 3 \geq 0,$$

$$4 - x > 0$$

bo'lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo'ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x \geq 3$, $x < 4$ bo'lib, ya'ni $3 \leq x < 4$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3, 4)$ bo'ladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta'rifida keltirilgan x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo'yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo'lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya analitik, jadval va grafik hamda kompyuter usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaning analitik usul bilan berilishida, x o'zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya'ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

2) o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1 , P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo'lishini topganda qo'yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	...	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	...	t_n

Bundan ko'rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog'lanish bo'lib, P argument, t funksiya bo'ladi. Funksiyaning bunday berilishiga jadval usulda berilgan deyiladi. Bunday usul ko'proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning grafik usulida berilishida, x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to'plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekislikda l chiziq berilgan bo'lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o'tadi. A nuqtadan OY o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o'qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo'ladi. Ma'lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, grafik usulda berilgan deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo'lgan hollarda va funksiyaning sifat o'zgarishi grafik usulda yaxshi ko'rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) algoritmik yoki kompyuter usuli. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo'ladi. Bunday programma EHMga qo'yilgan bo'lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

Funksiyaning ayrim hollari

1. Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko'rinishda, ya'ni y ga nisbatan yechilgan bo'lsa, unga oshkor funksiya deyiladi. Funksiya $F(x, y) = 0$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni y ga nisbatan yechilmagan bo'lsa, oshkormas funksiya ko'rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5$, $y = \sin x$, $y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko'rinishda; $2x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko'rinishda berilgan. Shuni ta'kidlaymizki hamma $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglik ham funksiyaning ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyaning ifodalamaydi,

chunki x ning har bir qiymatiga y ning qaqiqiy son qiymatini mos qo'yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo'lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo'lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ funksiyaning funksiyasi yoki y ga x ning murakkab funksiyasi deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo'lib. y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1)$, $y = 3^{x+5}$, $y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo'la oladi.

3. Teskari funksiya. $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. y funksiyaning qiymatlar to'plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, berilgan funksiyaga teskari $x = d(y)$ funksiya berilgan bo'ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo'lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo'ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo'ladi. O'zaro teskari bo'lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

Sonli ketma-ketlik va uning limiti. Agar o'sish tartibida olingan har bir n natural songa biror qoidaga binoan qandaydir x_n ifoda mos qo'yilgan bo'lsa, uni ifodalar ketma-ketligi deyiladi va

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

kabi yoziladi. Bu yerda x_n ketma-ketlikning n -hadi deyiladi ($n \in \mathbb{N}$), ba'zan, uni umumiy had deb ham yuritiladi. Ketma-ketlik uchun $\{x_n\}$ yoki (x_n) kabi belgilashlar ham qo'llaniladi.

Agar (1) ketma-ketlikning barcha hadlari sonlardan iborat bo'lsa, uni sonli ketma-ketlik deb ataladi. Bu bobda sonli ketma-ketliklar borasida so'z yuritamiz.

$$\text{Masalan,} \quad 2; 4; \dots; 2n; \dots \quad (1a)$$

juft sonlar ketma-ketligi,

$$1; 3; \dots; 2n-1; \dots \quad (1b)$$

toq sonlar ketma-ketligi,

$$1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \dots \quad (1c)$$

natural sonlarga teskari sonlar ketma-ketligi va hokazo.

Sonli ketma-ketliklar ustida ish yuritilganda ularning monotonlik va chegaralanganlik xossalari nazariy jixatdan o'z salmoqlariga egadirlar.

Ta'rif. Agar $m < r$ ixtiyoriy natural sonlar uchun sonli $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari orasida $x_m < x_r$ ($x_m > x_r$) munosabat o'rinli bo'lsa, u o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi.

1-eslatma. Yuqoridagi ta'rifda $x_m < x_r$ ($x_m > x_r$) tengsizlik o'rnida $x_m \leq x_r$ ($x_m \geq x_r$) tengsizlik ishlatilsa, ketma-ketlik keng ma'noda o'suvchi yoki kamaymovchi (keng ma'noda kamayuvchi yoki o'smovchi) deyiladi.

2-eslatma. O'suvchi (kamaymovchi) ketma-ketlik uchun

$x_n - x_{n+1} < 0$ ($x_n - x_{n+1} \leq 0$) tengsizlik, kamayuvchi (o'smovchi) ketma-ketlik uchun esa, $x_n - x_{n+1} > 0$ ($x_n - x_{n+1} \geq 0$) tengsizlik $\forall n \in \mathbb{N}$ bo'lganda o'rinli bo'lishi zarur va etarli shart ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi (kamaymovchi va o'smovchi) ketma-ketliklarni monoton (keng ma'noda monoton) ketma-ketliklar deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan (1a) va (1b) lar o'suvchi, (1c) esa kamayuvchi ketma-ketlikga misollardir, ular (uchchalasi ham) monotondir.

Haqiqatdan ham, (1a) uchun $x_n = 2n$ bo'lganidan $x_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$, ya'ni $x_n - x_{n+1} = -2 < 0$ ekanligi kelib chiqadi. (1b) uchun ham shunga o'xshash holat kuzatiladi, agar (1c) ni olsak, unda

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n} \text{ bo'lib, } x_{n+1} = \frac{1}{n+1} ; x_n - x_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

demak, (9.1.1a) va (9.1.1b) lar o'suvchi, (9.1.1c) esa kamayuvchi ketma-ketlik ekan.

Ta'rif. Agar berilgan $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun shunday M (m) o'zgarmas son mavjud bo'lsaki, uning har bir hadi shu sondan katta (kichik) bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) bo'lsa, bu sonli ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi, M (m) son uning yuqori (quyi) chegarasi deb ataladi.

Ta'rif. Ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, (1a) va (1b) lar quyidan chegaralangan, ammo, yuqoridan chegaralanmagan ketma-ketliklar ekanligini ko'rish qiyin emas. Agar (1c) ni olsak, u ham yuqoridan ham quyidan chegaralangandir, ya'ni uning ixtiyoriy hadi uchun

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

o'rinlidir. Demak, (1c) chegaralangan ketma-ketlikdir.

Ta'rif. Agar berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun biror a son mavjud bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat ε son uchun shunday n_0 natural son topilsaki, $\forall n_0 < n \in \mathbb{N}$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$x_n \rightarrow a \text{ yoki } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right)$$

kabi yoziladi.

Masalan, yuqoridagi ta'rif bo'yicha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

ekanligini isbotlaylik. Buning uchun ixtiyoriy musbat ε son berilganda ta'rifda aytilgan n_0 natural son topilishini ko'rsatish kifoya.

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

ε - ixtiyoriyligidan $\frac{2}{\varepsilon} - 1 > 0$ bo'ladigan qilib olish mumkin ($\varepsilon < 2$ deb olinsa kifoya).

Endi, $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$ deb olsak, yuqoridagi tengsizlik $\forall n_0 < n \in N$ uchun bajarilishi

kelib chiqadi. Masalan, $\varepsilon = 0,001$ desak, $n_0 = \left[\frac{2}{0,001} - 1 \right] + 1 = [2000 - 1] + 1 = 2000$.

$[x]$ yozuv x sonining butun qismini anglatishini eslatamiz.

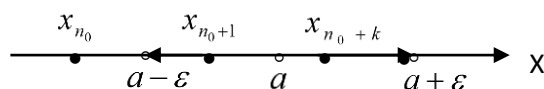
3-eslatma. Agar x o'zgaruvchi o'zining o'zgarishi jarayonida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlarini navbatma-navbat qabul qilib borsa, uni varianta deb ataydilar va bu holda yuqorida kiritilgan ketma-ketlik limitini varianta limiti deb ham yuritiladi.

4-eslatma. Chekli limiti mavjud bo'lgan ketma-ketlikni yaqinlashuvchi, aks holda esa uni uzoqlashuvchi deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limitining ta'rifini geometrik nuqtai-nazarda quyidagicha talqin qilish mumkin. Agar $x_n \rightarrow a$ bo'lsa, u vaqtda, $\forall \varepsilon > 0$ uchun n_0 natural son topilib,

$$\forall n_0 < n \in N, |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bo'lib, bu sonlar o'qida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\forall n_0 < n \in N$ bo'lgan barcha x_n hadlari a nuqtaning ε atrofida yotishi kelib chiqadi (1-rasm).



1-rasm.

9.1.1-teorema. (Limitning mavjudligi haqidagi 1-teorema). 1) Har qanday kamayuvchi (o'smovchi) va quyidan biror A son bilan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi va bu limit A dan kichik bo'lmaydi; 2) Har qanday o'suvchi (kamaymovchi) va yuqoridan biror B son bilan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi va bu limit B dan katta bo'lmaydi.

Isbot. Aytaylik, $\{x_n\}$ yuqoridan B son bilan chegaralangan o'suvchi (kamaymovchi) ketma-ketlik bo'lsin. U vaqtda, $\{x_n\}$ sonli to'plamning aniq yuqori chegarasi $B_0 = \sup \{x_n\}$ mavjuddir. Tabiiyki, $B_0 \leq B$ bo'ladi. Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\{x_n\}$ to'plamning shunday x_{n_0} elementi mavjud bo'ladiki, $B_0 - \varepsilon < x_{n_0} \leq B_0$ bajariladi. Bundan va $\{x_n\}$ o'suvchi (kamaymovchi) ekanligidan $\forall n_0 < n \in N$ uchun $B_0 - \varepsilon < x_n \leq B_0$ bo'lib, $|x_n - B_0| < \varepsilon$, ya'ni $\lim x_n = B_0$ kelib chiqadi.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti mavjud va u $\{x_n\}$ ning aniq yuqori chegarasiga teng hamda $\lim x_n = B_0 \leq B$ ekan.

Xuddi shunga o'xshash, kamayuvchi (o'smovchi) quyidan chegaralangan ketma-ketlikning chekli limitining mavjudligi va u ketma-ketlikning aniq quyi chegarasiga tengligi isbotlanadi.

1-misol. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikni qaraylik, uning kamayuvchi ekanligini

yuqorida ko'rsatgan edik, undan tashqari, $\forall n \in N$ uchun $\frac{1}{n} > 0$ ekanligini payqash

qiyin emas. Demak, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ kamayuvchi va 0 soni bilan quyidan chegaralangandir.

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ mavjud hamda $a \geq 0$ ekanligi yuqoridagi teoremdan kelib

chiqadi. Bu o'rinda, $\inf \frac{1}{n} = 0$ ekanligidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

2- misol. $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ ketma-ketlikni olsak, $\forall n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$$

bo'lib,

$$x_n - x_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Ya'ni kamayuvchi va quyidan 2 soni bilan chegaralangan ketma-ketlikka egamiz, demak, uning chekli limiti mavjuddir va bu limit 2 dan kichik emas.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

ekanligini isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

3- misol. $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$ ni qaralsa, $\forall n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1;$$

$$x_n - x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0.$$

Demak, u o'suvchi va yuqoridan 1 soni bilan chegaralanganligi uchun chekli limiti mavjud.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1$$

bo'lishiga ishonch hosil qiling.

4- misol. $\{x_n\}$ da $x_n = c$ (c - o'zgarmas) bo'lsa, $c \leq x_n \leq c$ deyish mumkin.

Demak, bu holda ketma-ketlik ham kamaymovchi ham o'smovchi ekanligidan uning chekli limiti mavjud va $c \leq \lim x_n \leq c$, ya'ni o'zgarmasning limiti o'ziga tengligi kelib chiqadi:

$$\lim c = c.$$

Teorema (Limitning mavjudligi haqidagi ikkinchi teorema). Agar $\{x_n\}, \{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar uchun biror m_0 nomerdan boshlab,

$$\forall n > m_0, \quad x_n \leq y_n \leq z_n$$

o‘rinli va $\lim x_n = \lim z_n = a$ chekli limit mavjud bo‘lsa, $\lim y_n$ chekli limit ham mavjud va $\lim y_n = a$ bo‘ladi.

Isbot. Teorema shartlari bajarilsin, u vaqtda, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_1 va n_2 nomerlar topiladiki.

$$\forall n_1 < n \in N, \quad |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall n_2 < n \in N, \quad |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

bajariladi. Agar $n_0 = \max \{n_1; n_2; m_0\}$ desak, $\forall n_0 < n \in N$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon,$$

ya‘ni $\lim y_n = a$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Teorema (Bir-birining ichiga joylashgan kesmalar haqidagi). Agar $\{[a_n; b_n]\}$ kesmalar ketma-ketligi uchun

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

o‘rinli, ya‘ni ular bir-birining ichiga joylashgan bo‘lib, $b_n - a_n \rightarrow 0$, ya‘ni kesmalar uzunligining limiti nolga teng bo‘lsa, barcha kesmalar uchun yagona umumiy c nuqta mavjud va

$$\lim a_n = \lim b_n = c$$

bo‘ladi.

Isbot. $\forall n \in N$ uchun $a_n \leq b_1$ va $b_n \geq a_1$ bo‘lib, $a_n \leq a_{n+1}$ va $b_n \geq b_{n+1}$ ekanligidan $\lim a_n$ va $\lim b_n$ chekli limitlarning mavjudligi 9.1.1-teoremadan kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim b_n = c$$

o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas. Undan tashqari

$$\forall n \in N, \quad a_n \leq c, \quad b_n \geq c, \quad \Rightarrow \quad c \in [a_n; b_n]$$

Bu c nuqta barcha kesmalar uchun yagona umumiy nuqtadir. Agar shunday boshqa c_0 nuqta ham mavjud deb faraz qilinsa,

$$c = \sup\{a_n\}, \quad c = \inf\{b_n\}$$

ekanligidan, agar $c_0 < c$ bo‘lsa, $c_0 < c - \varepsilon$ ($\varepsilon = c - c_0 > 0$) uchun $a_{n_0} > c_0$ mavjud bo‘lib, bundan

$$c_0 \notin [a_{n_0}; b_{n_0}]$$

ekanligi kelib chiqadi, buning esa bo‘lishi mumkin emasdir. Xuddi shunga o‘xshash, $c_0 > c$ hol ham qaraladi. Demak, aytilgan c nuqta yagona ekan.

Ta‘rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lib, undan $k \in N, n_k \in N, n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ shart asosida $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olingan bo‘lsa, uni berilgan ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi deyiladi.

Bu ta‘rifdan ko‘rinadiki, agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, u ham asosiy ketma-ketlik

limitiga ega bo'ladi. Lekin, buning aksinchasi hamma vaqt ham o'rinli bo'lavermaydi.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikni ajratib olish mumkin.

Isbot $a = \inf \{x_n\}$ va $b = \sup \{x_n\}$ mavjud bo'lib, $\forall n \in N \quad x_n \in [a; b]$ bo'lishi ravshandir. $[a; b]$ ni $\frac{a+b}{2}$ nuqta yordamida teng ikkiga bo'lamiz. Bu kesmalardan aqalli bittasida ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashadi, o'shanisini $[a_1; b_1]$ deb olamiz va unga tegishli bo'lgan ketma-ketlikning bitta x_{n_1} hadini olamiz, ya'ni $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$; yuqoridagi jarayonni $[a_1; b_1]$ kesma uchun takrorlash natijasida $[a_2; b_2]$ kesmaga va oldin tanlangan x_{n_1} dan farqli hamda $n_2 > n_1$ bo'lgan $\{x_n\}$ ning hadini tanlab, $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$ ga ega bo'lamiz. Va hokazo, bu jarayonni cheksiz takrorlab borish natijasida $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikka (bunda $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$) va

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_k; b_k] \supset \dots,$$

ya'ni bir-birining ichiga joylashgan kesmalar sistemasiga hamda ularning uzunliklari

uchun $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ ga ega bo'lamiz. Bundan $\lim (b_k - a_k) = 0$ bo'lishi aniqdir. Demak, teoreмага ko'ra kesmalar uchun umumiy yagona c nuqta mavjud va $\lim a_k = \lim b_k = c$ dir. Undan tashqari, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ ekanligidan

$$\lim x_{n_k} = c$$

bo'lishi avvalgi teoremadan kelib chiqadi, ya'ni $\{x_{n_k}\}$ yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikdir. Teorema isbotlandi.

Ta'rif (Koshi mezoni). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda shunday $n_0 \in N$ mavjud bo'lsaki, $\forall n_0 < n \in N$ va $\forall n_0 < m \in N$ uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyilib, u Koshi shartini qanoatlantiradi deb ham ataladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$ bo'lsa, uning fundamental ekanligi

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a|$$

tengsizlik yordamida osongina isbotlanadi.

Fundamental ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini isbotlash ham qiyinchilik tug'dirmaydi. Shu bilan birga, quyidagi tasdiq ham o'rinlidir.

Teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarlidir.

Isboti Koshi mezonini qanoatlantiruvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'lishidan yuqoridagi teoremani qo'llash natijasida olinadi (o'quvchiga mustaqil ravishda isbotlashni tavsiya qilamiz).

Bu teoremaning tatbiqi sifatida umumiy hadi $x_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ dan iborat bo'lgan $\{x_n\}$, ya'ni $0, 1, 0, 1, \dots$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi emasligini ko'rsatamiz.

$\forall \varepsilon > 0$ berilganda $\forall n \in N$ uchun

$$|x_{n+1} - x_n| = 1$$

ekanligi ravshandir. Endi, $0 < \varepsilon < 1$ deb faraz qilsak, n har qancha katta olinganda ham

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilmasligi aniqdir. Bu ketma-ketlik uchun Koshi sharti bajarilmas ekan. Demak, u uzoqlashuvchidir.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli chekli limitiga (ya'ni $\lim x_n = a \neq 0$) ega bo'lsa, u holda, shunday n_0 natural son topiladiki,

$$\forall n_0 < n \in N, |x_n| > \frac{|a|}{2}$$

o'rinli bo'ladi.

Isbot. $\lim x_n = a \neq 0$, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 topiladiki, $\forall n_0 < n \in N, |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ o'rinli bo'ladi.

a) $a > 0$; $\varepsilon = \frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} < x_n < \frac{3a}{2} \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}$;

b) $a < 0$; $\varepsilon = -\frac{a}{2} = \frac{|a|}{2}$; $\frac{3a}{2} < x_n < \frac{a}{2} \Rightarrow |x_n| > -\frac{a}{2} = \frac{|a|}{2}$.

Teorema isbotlandi.

2-natija. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik noldan farqli chekli limitga ega bo'lsa, uning hadlari ma'lum nomerdan boshlab o'z limitining ishorasi bilan bir xil ishoraga ega bo'ladi.

3-natija. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti mavjud bo'lib, biror n_0 nomerdan boshlab

$$\forall n_0 < n \in N, x_n \geq 0; (x_n > 0)(x_n \leq 0) (x_n < 0)$$

tengsizlik bajarilsa, $\lim x_n \geq 0$ ($\lim x_n \leq 0$) bo'ladi.

4-natija. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning chekli limiti mavjud bo'lib, biror n_0 nomerdan boshlab

$$\forall n_0 < n \in N, x_n \geq y_n (x_n > y_n)$$

tengsizlik bajarilsa,

$$\lim x_n \geq \lim y_n$$

o'rinlidir.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning chekli limitlari mavjud

bo'lib, $\lim y_n \neq 0$ bo'lsa, $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ ning limiti ham mavjud va

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. Agar $\lim x_n = a, \lim y_n = b \neq 0$ desak, u holda

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n \quad (\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0)$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{y_n \cdot b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

bo‘lib, yuqoridagi teorema asosida qandaydir n_0 nomerdan boshlab $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ o‘rinli bo‘ladi.

Bundan $\left| \frac{1}{by_n} \right| < \frac{2}{|b|^2}$, ya‘ni n_0 dan boshlab $\frac{1}{by_n}$ chegaralanganligi kelib chiqadi. Undan tashqari, $b\alpha_n - a\beta_n$ cheksiz kichik miqdor bo‘lishini hisobga olsak,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

ekanligidan teorema isboti kelib chiqadi.

Ta’rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lib, ixtiyoriy olingan musbat M son uchun shunday n_0 natural son mavjud bo‘lsaki, $\forall n_0 < n \in N, |x_n| > M$ o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta miqdor deyiladi va $x_n \rightarrow \infty$ yoki $\lim x_n = \infty$ kabi yoziladi.

Bu o‘rinda shuni eslatamizki, “ ∞ ” belgisi sonni emas, balki, sonlarning eng kattasi ham eng kichigi ham mavjud emasligini ko‘rsatuvchi belgini, $\lim x_n = \infty$ yozuv esa limit cheksizga teng degan ma‘noni emas, balki, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor ekanligini anglatadi. Ba‘zan $x_n \rightarrow \infty$ bo‘lganda $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyish o‘rniga miqdor cheksiz limitga ega deb ataladi. Ammo, bu holda u uzoqlashuvchi hisoblanadi.

Yuqoridagi ta’rifda $|x_n| > M$ o‘rniga $x_n > M$ ishlatilsa, musbat cheksiz katta miqdor, $x_n < -M$ ishlatilganda esa, manfiy cheksiz katta miqdor to‘g‘risida so‘z ketadi va bu holda mos ravishda $x_n \rightarrow +\infty$ yoki $x_n \rightarrow -\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Cheksiz katta miqdorlar ham cheksiz kichik miqdorlarga o‘xshash xossalarga ega, lekin, bunday xossalarni qo‘llashda ehtiyotkorlik talab qilinadi. Masalan, bir xil ishorali cheksiz katta miqdorlarning yig‘indisi cheksiz katta miqdor bo‘ladi, ammo ayrimasi hamma vaqt ham cheksiz katta bo‘lavermaydi.

Bunga misol qilib, umumiy hadlari mos ravishda $x_n = n^2 + \frac{1}{n}, y_n = n^2 - \frac{1}{n}$ bo‘lganda $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklarni keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham,

$$x_n + y_n = 2n^2 \quad \text{- cheksiz katta miqdor,}$$

$$x_n - y_n = \frac{2}{n} \quad \text{- cheksiz kichik miqdor,}$$

ya‘ni cheksiz katta miqdor emas.

Teorema. Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Aksincha, $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0$) cheksiz kichik miqdor bo'lganda, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo'lsin, u holda $\forall M > 0$ uchun shunday n_0 nomer topiladiki,

$$\forall n_0 < n \in N, |x_n| > M$$

bo'lib,

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$$

kelib chiqadi. Endi, $\frac{1}{M} = \varepsilon > 0$ ($M = \frac{1}{\varepsilon}$) desak, $\lim \frac{1}{x_n} = 0$

ya'ni $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik miqdor bo'lishini ko'rish mumkin. Aksinchasi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema. Monoton (keng ma'noda bo'lishi ham mumkin) ketma-ketlik har doim chekli yoki cheksiz limitga egadir.

Isbot. Agar monoton ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, uning chekli limiti mavjud ekanligi avvalgi teoremda isbotlangandir. Endi, $\{x_n\}$ monoton ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lsin deb faraz qilaylik. Aniqlik uchun bu ketma-ketlik o'suvchi (kamaymovchi) va yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. U vaqtda, $\forall M > 0$ olinganda $\exists n_0 \in N$ $x_{n_0} > M$ bo'ladi. Ketma-ketlik o'suvchiligidan $\forall n_0 < n \in N$ $x_n > M$ kelib chiqadi. Bu $\lim x_n = +\infty$ ekanligini ko'rsatadi.

Xuddi shunga o'xshash, kamayuvchi (o'smovchi) quyidan chegaralanmagan $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsa, $\lim x_n = -\infty$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Natija. Yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan kamaymovchi (o'smovchi) ketma-ketlik $+\infty(-\infty)$ limitga egadir.

Bu o'rinda quyidagi mulohazalarni keltirishni lozim topdik. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, uning yordamida umumiy hadlari mos ravishda

$$y_n = \inf_{k \in N} \{x_{n+k-1}\}, \quad z_n = \sup_{k \in N} \{x_{n+k-1}\}$$

kabi aniqlangan $\{y_n\}, \{z_n\}$ ketma-ketliklar tuzilgan bo'lsin. Bu o'rinda, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan (yuqoridan) chegaralanmagan bo'lsa, shartli ravishda, $y_n = -\infty (z_n = +\infty)$ deb qabul qilish lozimligini aytamiz. Bunday aniqlangan $\{y_n\}, \{z_n\}$ ketma-ketlik kamaymovchi (o'smovchi) bo'lganligi uchun yuqoridagi 9.2.13-teoremaga ko'ra uning chekli yoki cheksiz limiti mavjudligi kelib chiqadi. $\lim y_n$ ($\lim z_n$) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi (yuqori) limiti deb ataladi va uning uchun $\lim x_n$ ($\overline{\lim x_n}$) belgilash qabul qilingandir.

Quyidagi tasdiq o'rinli ekanligini payqash qiyin emas.

Teorema. $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik limitga ega bo'lishi uchun uning quyi va yuqori limitlarining teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbotini o'quvchining o'ziga qoldiramiz.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to'plamini toping:

- 1) $f(x) = \ln(x+3)$; 2) $f(x) = \sqrt{5-2x}$; 3) $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

- 1) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x) = (a+x)/(a-x)$;
3) $f(x) = \lg(5x - x^2 - 6)$; 4) $f(x) = 2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo'lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog'lanishni toping.

5. 1) $f(u) = 1-u$, $u = x^2$; 2) $f(u) = 1/(1-u)$, $u(x) = x - 1/x$;
3) $f(u) = u^2$, $u(x) = 4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini aniqlang:

- 1) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0, +\infty)$; 2) $f(x) = 2x + 3$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 3) $f(x) = (x-1)^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 4) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

- 1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = -\frac{3}{x}$; 3) $y = 2 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{2}{x-1}$.

8. Umumiy hadi quyidagicha bo'lgan ketma-ketlikni yozing.

a) $x_n = \frac{1}{2^n}$; b) $x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$.

9. $\{x_n\}$ ketma-ketlik umumiy hadi $x_n = \frac{2n+1}{n+3}$ formula bilan berilgan. Bu

ketma-ketlikning x_{10}, x_{25} hadlarini toping.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \left(3 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} - 4 \right) \right)$ limit hisoblansin.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7}{3n+2}$ limit hisoblansin.

18-mavzu. Funksiya limiti, bir tomonlama limitlar. Funksiyaning uzluksizligi

Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1-Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ëku} \quad x \rightarrow a \quad \text{da} \quad f(x) \rightarrow A \quad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning chap yoki o'ng limit tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

bilan belgilanadi.

3-Ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiya cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.) deyiladi.

4-Ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.) deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (4)$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) yig'indining limiti. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \rightarrow a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Natija: O'zgaras ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) Ikkita funksiya nisbatining limiti, maxrajning limiti no'ldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar deyiladi.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x+6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A = 5/6$ o'zgaras miqdor orasidagi farq $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x+6)/6x = 5/6.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2 - 5x + 4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \rightarrow 3$ bo'lganligi uchun $x - 3 = \alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$$x = 3 + \alpha \text{ ni } (2x^2 - 5x + 4) - 7 \text{ ayirmaga qo'yib,}$$

$$2(3 + \alpha)^2 - 5(3 + \alpha) + 4 - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$

$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

natijaga ega bo'lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun $2\alpha^2 + 7\alpha$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

Shunday qilib,

isbot bo'ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2 - 5x + 4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko'rsataylik. Ma'lumki $x \rightarrow 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3$
$2x^2 - 5x + 4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\rightarrow 7$

Bu jadvaldan ko'rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya'ni $x - 3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2 - 5x + 4 - 7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to'g'ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x < 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni qaradik. $x > 3$ bo'lib, $x \rightarrow 3$ holni o'quvchiga mustaqil ko'rsatishni tavsiya qilamiz.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$$

Misol. limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 6x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 =$$

$$= 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7$$

hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

Misol.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7) / (2x^2 - 5x + 6)$$

limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 6)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6} \\&= \frac{3\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2 - 4\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right) + 7}{2\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2 - 5\lim_{x \rightarrow 1} x + 6} = \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

bo'ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiylarning $x \rightarrow a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x = a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\lg(t + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{t^2 + 8}] = \lg(1 + \sqrt{1^2 + 80}) + \sqrt{1^2 + 8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4$$

Misol $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x = 1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinish-dagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} = \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3\end{aligned}$$

bo'ladi.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo'lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya'ni x^2 ga bo'lamiz, hamda limitlarning xossalariidan foydalansak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2\end{aligned}$$

bo'ladi. Bunda $5/x$, $4/x^2$, $7/x$, $2/x^2$ lar $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo'ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o'tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1} + 2$ ga ko'paytiramiz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2 - 2^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{3+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.\end{aligned}$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4} = - \frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

natijani olamiz.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x = \alpha$, deb almashtirsak, bundan $x = \alpha/5$, $x \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/5} = 5 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \cdot 1 = 5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x = \alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x = 3/\alpha$ hamda $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi..Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x \rightarrow 1$ da $1/(x-1) \rightarrow \infty$ va $2/(x^2-1) \rightarrow \infty$ bo'lib, $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo'ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow +\infty$ da $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}. \end{aligned}$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 3x/x^2} + x/x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

bunda $x \rightarrow +\infty$ da $3/x \rightarrow 0$ bo'ladi.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

$$1. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{5x} = \frac{4}{5}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} (4x-7) = 5,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} (5x+8) = 3, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - 4x + 6 = 10$$

ekanligini funksiya limiti ta'rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

2. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalariidan foydalanib hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 7);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}; \quad 6) \lim_{t \rightarrow 3} \left[2t + \sqrt{t^2 - 8} + \lg(3t + \sqrt{t^2 - 8}) \right].$$

3. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni oching:

$$1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 11}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 8x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 12}{10x^6 + 7x^5 - 6x^3 - 4x - 17}.$$

4. Quyidagi limitlarni hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1};$$

5. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x/3}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x/2}{x^2};$$

**19-mavzu.Limitlarning asosiy xossalari. Aniqmasliklar va ularni ochish.
Birinci va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiya limitining tatbiqlari.**

19.1.Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1-Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ëku} \quad x \rightarrow a \quad \text{da} \quad f(x) \rightarrow A \quad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning chap yoki o'ng limit tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (3)$$

bilan belgilanadi.

3-Ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiya cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.) deyiladi.

4-Ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.) deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (4)$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) yig'indining limiti. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \rightarrow a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad (6)$$

Natija: O'zgaras ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf_1(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \quad (7)$$

3) Ikkita funksiya nisbatining limiti, maxrajning limiti no'ldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad e = 2,71828... \quad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar deyiladi.

Aniqmasliklar va ularni ochish

1. Aniqmasliklar. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da $(0/0)$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \rightarrow a$ da (∞/∞) ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi. Xuddi shunga o'xshash $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] \quad \text{va} \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga aniqmasliklarni ochish deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida hamma nuqtalarda o'zaro teng bo'lsa, ularning $x \rightarrow a$ dagi limiti ham teng bo'ladi.

Masalan, $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x) = \frac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2 - 9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo'lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$

ekanligini funksiya limitining ta'rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x+6)/6x$ o'zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o'zgarmas miqdor orasidagi farq $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko'rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o'zgaruvchi miqdor $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x+6)/6x = 5/6.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3)$$

Misol. limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 6x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 6x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 = \\ &= 4(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 7 \end{aligned}$$

hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalriga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

Misol.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7) / (2x^2 - 5x + 6)$$

limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 5x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 4x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 5x + 6)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 5x + \lim_{x \rightarrow 1} 6} = \\ &= \frac{3\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2 - 4\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right) + 7}{2\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2 - 5\lim_{x \rightarrow 1} x + 6} = \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7}{2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6} = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiylarning $x \rightarrow a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x = a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\lg(t + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{t^2 + 8}] = \lg(1 + \sqrt{1^2 + 80}) + \sqrt{1 + 8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4$$

Misol $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x = 1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinish-dagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo'lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya'ni x^2 ga bo'lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2\end{aligned}$$

bo'ladi. Bunda $5/x, 4/x^2, 7/x, 2/x^2$ lar $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo'ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o'tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1} + 2$ ga ko'paytiramiz.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2 - 2^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x+1-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{3+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.\end{aligned}$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x + \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\cos \pi/4 + \sin \pi/4} = - \frac{1}{\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2} = - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

natijani olamiz.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x = \alpha$, deb almashtirsak, bundan $x = \alpha/5$, $x \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/5} = 5 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 5 \cdot 1 = 5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x = \alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x = 3/\alpha$ hamda $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$.

Misol. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x \rightarrow 1$ da $1/(x-1) \rightarrow \infty$ va $2/(x^2-1) \rightarrow \infty$ bo'lib, $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo'ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \rightarrow +\infty$ da $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}. \end{aligned}$$

Oxirgi ifoda $x \rightarrow \infty$ da (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2 + 3x/x^2} + x/x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

bunda $x \rightarrow +\infty$ da $3/x \rightarrow 0$ bo'ladi.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

$$1. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{5x} = \frac{4}{5}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} (4x-7) = 5,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} (5x+8) = 3, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - 4x + 6 = 10$$

ekanligini funksiya limiti ta'rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

2. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossaligidan foydalanib hisoblang:.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 7x + 6); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x + 7);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 5}; \quad 6) \lim_{t \rightarrow 3} \left[2t + \sqrt{t^2 - 8} + \lg(3t + \sqrt{t^2 - 8}) \right].$$

3. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni oching:

$$1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{4x^2 - 5x - 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 6x^2 + 7x + 5}{8 - 4x + 3x^2 - 2x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 8x - 9}{3x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 2x + 11}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 8x^6 + 5x^4 - 3x^2 - 12}{10x^6 + 7x^5 - 6x^3 - 4x - 17}.$$

4. Quyidagi limitlarni hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1};$$

5. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x/3}{x}; \quad 3)$$

20-mavzu. Funksiya hosilasi va uning tatbiqlari. Bir o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari. Funksiyaning grafigiga

berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari. Murakkab, parametrik, teskari va oshkormas funksiyalarning hosilasi, hosilani hisoblash qoidalari, hosilalar jadvali.

Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo'ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma'lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o'zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lining shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushishi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2} t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Bu harakat notekis bo'lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo'lsin. OA yo'lining miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya'ni t , Δt orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo'ladi. AB , vaqt Δt orttirma olgandagi yo'l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo'yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2} (t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{yoki} \quad \Delta S = \frac{g}{2} (2t\Delta t + \Delta t^2)$$

Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2} (2t + \Delta t) \quad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma'lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog'liq.

Masalan: $\Delta t = 0,1$ sek, $t = 1$ sek bo'lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2} (2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g \quad \text{bo'lib, } t = 3 \text{ sek bo'lganda}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g \quad \text{bo'ladi.}$$

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi oniy tezlik haqida gapirish kerak bo'ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma'lumki, t o'zgarmas bo'lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o'rtacha tezlik bo'lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma'lumki, Δt qancha kichik bo'lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo'yidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga ko'p sondagi amaliy masalalarni yechishda to'g'ri keladi.

Umuman, o'zgaruvchi miqdor o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi. Shuning uchun (3) ko'rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo'ladi.

Funksiya hosilasining ta'rifi.

1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni differensiallash deb ataladi.

Biz oʻrganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflan-masin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori boʻlsa, demak Q τ ning funksiyasi boʻladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror oʻtkazgich kesim yuzidan vaqt birligida oʻtayotgan elektr miqdori boʻlsa, Q hosila tok kuchining oʻzgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning oʻzgaruvchi temperaturasi tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila taʼrifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

Misol: $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila taʼrifiga asosan toping.

Yechish: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

Misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila taʼrifiga asosan, toping.

Yechish: argument x , Δx ortirma olganda, funksiya Δy ortirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \Delta x / 2) \sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)};$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{da} \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = 1.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \quad y' = (\sin x)' = \cos x$$

Shunday qilib,
boʻladi.

Umuman, x va y o'zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma'nolaridan voz kechsak, y dan x bo'yicha olingan hosila, y ning x ga bog'liq bo'lib o'zgarishining tezligini ifodalaydi.

Hosilaning geometrik ma'nosi. Hosila muhim geometrik ma'noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo'ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o'tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$$

bo'ladi.

Misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa absissasi $x_0 = 2$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish: $y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$

yoki

$3y - 20 = 12(x - 2), \quad 12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2, 20/3)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffitsienti

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{demak,} \quad y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

yoki

$$12y - 80 = -3(x - 2), \quad 3x + 12y - 86 = 0$$

bo'lib, bu M_0 nuqtadan o'tkazilgan normalning tenglamasi bo'ladi.

Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya'ni $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya bo'lsa, $y = f(u)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

bo'ladi.

2) Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ lar o'zaro teskari funksiyalar bo'lsa,
 $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ bo'ladi.

Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali quyidagicha bo'ladi:

$$1) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in R, \quad u > 0;$$

$$2) (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$$

$$3) (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$4) (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$5) (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$6) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$7) (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$8) (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$9) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$10) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$12) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$13) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$14) (u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari

1). x o'zgaruvchining y funksiyasi oshkormas ko'rinishda $F(x, y) = 0$ berilgan bo'lsa, y' hosilani topish uchun $F(x, y) = 0$ tenglikni x bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

Misol. $x^2 + y^2 = 100$ oshkormas ko'rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish: $2x + 2y \cdot y' = 0$; $2yy' = -2x$, $y' = -x/y$; keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Endi, $y' = -\frac{x}{y}$ ni hisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}; y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo'ladi, chunki, $x^2 + y^2 = 100$ edi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiya hosilasi.

Faraz qiling funksiya parametrik, ya'ni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin, u holda undan x bo'yicha olingan hosilalar quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \quad (1)$$

formula bilan topiladi.

Misol.

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

parametrik ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\text{Yechish: } \frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t, \frac{dy}{dt} = a \cos t, \frac{d^2y}{dt^2} = -a \sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-a \sin t \cdot (-a \sin t) - (-a \cos t) \cdot a \cos t}{(-a \sin t)^3} = \frac{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}{-a^3 \sin^3 t} = \\ &= -\frac{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^3 \sin^3 t} = -\frac{1}{a \sin^3 t}. \end{aligned}$$

$$\text{Demak, } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

bo‘ladi.

Teskari funksiyaning hosilasi. Agar $y=f(x)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo‘lib, $y' \neq 0$ bo‘lsa, unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo‘lib, u ham differensiallanuvchi va

$$y' = \frac{1}{x'} \left(x' = \frac{1}{y'} \right)$$

o‘rinlidir, ya’ni teskari funksiyaning hosilasi funksiya hosilasining teskari qiymatiga tengdir.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Bu

tenglikdan kelib chiqadi (bunda monoton va uzluksiz funksiya uchun $\Delta x \neq 0 \Leftrightarrow \Delta y \neq 0$, $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$ bo‘lishini eslash kerak bo‘ladi).

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$1) y = x \ln x; \quad 2) y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad 3) y = \lg(5x).$$

$$4) y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}; \quad 5) y = \frac{\ln x}{x^2}; \quad 6) y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$7) y = \ln(1 + \cos x); \quad 8) y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

$$9) y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}); \quad 10) y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}; \quad 11) y = \lg(5x + 3).$$

$$12) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}); \quad 13) y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax}}; \quad 14) y = \ln(\operatorname{tg} x).$$

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$1) y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x; \quad 2) y = \arcsin \sqrt{1-4x}.$$

$$3) y = x - \operatorname{arctg} x; \quad 4) y = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$5) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}; \quad 6) y = \arccos(1-2x).$$

$$7) y = x\sqrt{1-x^2} + \arccos x; \quad 8) y = \arcsin(e^{3x}).$$

$$9) y = x \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad 10) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$11) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad 12) y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1}.$$

$$13) y = x \arccos(1-x^2); \quad 14) y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}.$$

$$15) y = \arccos \sqrt{1-3x} + \sqrt{2x-4x^2};$$

21-mavzu. Elementar funksiyalarning hosilalari. Yuqori tartibli hosilalar, funksiyaning differensiali. Funksiya differensialining taqribiy xisoblashga tatbiq'i. Hosila va differensialning muhandislik masalalariga tatbiqlari.

21.1. Yuqori tartibli hosila va differentsiallar

$u=f(x)$ funksiya (a,b) ning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ ham x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, uning hosilasini topish mumkin.

$u=f(x)$ funksiya hosilasi $f'(x)$ ning hosilasi berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

kabi belgilanadi. Demak $f''(x) = (f'(x))'$.

Uchinchi, to'rtinchi va hakazo tartibli hosilalar yuqoridagidek kiritiladi. $f''(x), f^{(20)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Misol. $y = x \sin x$, $y'' = ?$

$$y' = \sin x + x \cos x, \quad y'' = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x.$$

Funksiyaning differensial. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy argument orttirmasi Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismga ega bo'lsa, bu chiziqli bosh qism funksiyaning x_0 nuqtadagi differensial deyiladi va dy yoki $df(x_0)$ bilan belgilanadi.

Demak, ta'rif bo'yicha x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiya differensial mavjud bo'lsa,

$$\Delta y = (A + \alpha)\Delta x = A\Delta x + \alpha\Delta x$$

kabi yozish mumkin bo'lib, bu yerda A -o'zgarmas, α esa $\Delta x \rightarrow 0$ da cheksiz kichik miqdordir.

Ta'rifga asosan,

$$dy = y'\Delta x \quad (2)$$

(2) formulada $y = x$ bo'lsa, $dx = x'\Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo'lib, funksiya differensial

$$dy = y'dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Elementar funksiyalarning differensial jadvalini keltiramiz.

$$1. \quad d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad (x > 0);$$

$$2. \quad d(a^x) = a^x \ln a \, dx \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3. \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \, dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$$

$$4. \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx;$$

$$5. \quad d(\sin x) = \cos x \, dx;$$

$$6. \quad d(\cos x) = -\sin x \, dx;$$

$$7. \quad d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx;$$

$$8. \quad d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx;$$

$$9. \quad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$10. \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$11. \quad d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$$

$$12. \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

Differensiallash qoidalari:

x erkli o'zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin.

1., $C' = 0$ C - o'zgarmas miqdor.

2. $x' = 1$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

Yuqori tartibli hosilalar. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya'ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi: y'' , $f''(x)$, $d^2 y / dx^2$.

$y = f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y / dx^n$. Ta'rifga ko'ra $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish:

$$y' = [(2x^2 - 7)^3]' = 3(2x^2 - 7)^2 (2x^2 - 7)' = 3(2x^2 - 7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 - 7)^2;$$

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = [12x(2x^2 - 7)^2]' = 12\{x'(2x^2 - 7)^2 + x[(2x^2 - 7)^2]'\} = \\ &= 12[(2x^2 - 7)^2 + 2x(2x^2 - 7) \cdot 4x] = 12(2x^2 - 7)(2x^2 - 7 + 8x^2) = \\ &= 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7). \end{aligned}$$

Demak, $y'' = 12(2x^2 - 7)(10x^2 - 7)$.

Misol. $y = x^n$ funksiyaning n -tartibli hosilasini toping.

Yechish: $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}, \dots, y^{(n-1)} =$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n - (n-2)]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2x$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$(n!)$ 1 dan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasining qisqa yozilishi).

Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.

(1) formuladan $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglik kelib chiqadi, ya'ni Δx yetarlicha kichik bo'lganda, funksiya orttirmasi uning differensialiga taqriban teng deyish mumkin.

Bunda $\Delta y \approx dy$ bo'lib, ya'ni $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ yoki

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (3)$$

(3) formuladan funksiya qiymatini taqribiy hisoblashlarda foydalaniladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensial deb funksiya differensialidan olingan differensialga aytiladi va

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2$$

bilan belgilanadi.

Xuddi shunday, $d^3 y = y'''dx^3$, ... , $d^n y = y^{(n)}dx^n$ differensiallar ham aniqlanadi.

Misol. $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish: Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{va} \quad d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx^2$$

bo'ladi.

Misol. $f(x) = 3x^2 - 7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o'zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Yechish: (3) formuladan foydalanamiz. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001$.

$$f'(x) = 6x, \quad f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12, \quad \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \Delta x = 12 \cdot 0.001 = 0.012.$$

Funksiya orttirmasi o'rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo'l qo'yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) = \\ &= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003. \end{aligned}$$

Demak, absolyut xato

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{yoki} \quad 0,025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1-8 misollarda funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

2. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.

5. 1) $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln \alpha)$;

6. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

7. 1) $y = \ln \cos x$; 2) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{4u-1}$; 2) $s = e^{-2t}$.

8. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli hosilalari topilsin.

22-mavzu. Funktsiyaning ekstremumi. Funktsiyaning eng kata va eng kichik qiymatlarini topish va grafiklarini chizish.

22.1. Funktsiyaning monotonligini aniqlashda hosilaning tatbiqi

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun (a,b) da $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Zarurligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) da chekli hosilaga ega va o'suvchi (kamayuvchi). $\forall x \in (a,b), x+\Delta x \in (a,b); \Delta x > 0$, $f(x) \leq f(x+\Delta x)$ ($f(x) \geq f(x+\Delta x)$), $\Delta x < 0$ $f(x) \geq f(x+\Delta x)$ ($f(x) \leq f(x+\Delta x)$) lar o'rinli, bulardan

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \right)$$

bo'ladi. Natijada, $\Delta x \rightarrow 0$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) ekanini topamiz.

Yetarliligi. Shartga ko'ra $f(x)$ (a,b) da chekli hosilaga ega bo'lib, (a,b) da $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ bo'ladi. U holda $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya $[x_1, x_2]$ da Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Demak, $\exists s \in (x_1, x_2) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad f'(c) \geq 0 \ (f'(c) \leq 0), \quad x_2 - x_1 > 0$.
 Bundan $f(x_2) \geq f(x_1) \ (f(x_2) \leq f(x_1))$. Bu esa $f(x)$ funktsiyaning (a, b) da o'suvchi (kamayuvchi) ekanini bildiradi.

Misol:

2. Funktsiyaning ekstremum qiymatlarini topishda hosilaning tatbiqi

$f(x)$ funktsiya (a, b) da aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $U_\delta(x_0) = \{x: x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ $c \in (a, b)$ atrofi mavjud bo'lsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x) \leq f(x_0), f(x) < f(x_0) \ (f(x) \geq f(x_0), f(x) > f(x_0))$ o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada maksimumga, qat'iy maksimumga (minimumga, qat'iy minimumga) ega deyiladi.

1- Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ chekli hosilaga ega bo'lib, bu nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi. Bu tasdiq Ferma teoremasidan (zaruriy shartdan) kelib chiqadi.

$U_\delta^-(x_0) = \{x: x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0, \delta > 0\}, U_\delta^+(x_0) = \{x: x \in \mathbb{R}, x_0 < x < x_0 + \delta, \delta > 0\}$. Agar $\forall x \in U_\delta^-(x_0)$ uchun $f'(x) > 0 \ (f'(x) < 0)$ $\forall x \in U_\delta^+(x_0)$ uchun $f'(x) < 0 \ (f'(x) > 0)$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) ega bo'ladi.

Bu tasdiq isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

Misol. $u = x^2 - 2x + 5$ funktsiyani tekshiring.

$y'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1), \quad y'(x) = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x = 1$ statsionar (kiritik) nuqta bo'ladi.

Ravshanki, $x < 1$ da $f'(x) < 0$, $x > 1$ da $f'(x) > 0$.

Demak, funktsiya hosilasi $f'(x)$ «-» dan «+» o'zgaradi, ya'ni x_0 minimum nuqta, $f_{\min} = f(1) = 4$.

2-Teorema. $x=c$ nuqtada $f(x)$ funktsiyaning birinchi hosilasi nolga teng ($f'(c) = 0$) bo'lsin, ikkinchi hosila mavjud bo'lib, u noldan farqli bo'lsin ($f''(c) \neq 0$). Bu holda, agar $f''(c) < 0$ bo'lsa $x=c$ nuqtada funktsiya maksimumga, agar $f''(c) > 0$ bo'lsa minimumga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

Misol: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ funktsiyaning ekstremumini toping.

Yechish: 1. Funktsiyaning hosilasini topamiz: $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$.

2. Kritik nuqtalarni topamiz: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

3. Ikkinchi hosilani topib, uning kritik nuqtalardagi qiymatlarini ishorasini aniqlaymiz: $f''(x) = 6(x - 2), \quad f''(1) = -6 < 0, \quad f''(3) = 6 > 0$.

Demak: $f_{\max}(x) = f(1) = 2, \quad f_{\min}(x) = f(3) = -2$.

3. Funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish

$[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan, $y = f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Uning eng katta va eng kichik qiymatini topish quyidagi qoidaga asosan bajariladi.

1. Funktsiyaning segmentdagi barcha kritik nuqtalarini topiladi va ulardagi funktsiya qiymatlari hisoblanadi.
2. Funktsiyaning segment chegaralaridagi qiymatlari hisoblanadi.
3. Bu qiymatlarning ichidan eng katta va eng kichik qiymatlar olinadi.

Izoh. Segmentda uzluksiz bo'lgan funktsiya, ichki nuqtada bitta ekstremiumga ega bo'lib, u maksimum bo'lsa – eng katta qiymat, minimum bo'lsa – eng kichik qiymat bo'ladi.

Misol: 1). $f(x) = x^3 - 3x$ funktsiyaning $[-2; 3]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish: 1. Funktsiyaning segmentdagi kritik nuqtalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0. \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Funktsiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

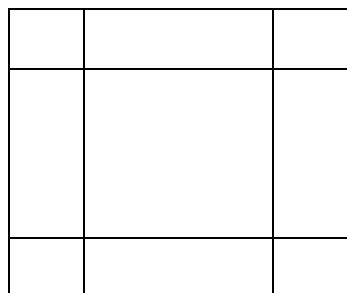
$$f(-1) = 2, f(1) = -2.$$

2. Funktsiyaning segment chegaralaridagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = -2, f(3) = 18.$$

Demak: $f_{\max}(x) = f(3) = 18, f_{\min}(x) = f(-2) = f(1) = -2.$

2). Tomoni a ga teng kvadrat tunikadan teng kvadratchalar,



(rasmda shtrixlab ko'rsatilgan) qirqib tashlab va uni buklab

hajmi eng katta bo'ladigan ochiq quti yasash uchun qirqiladigan kvadratlarning tomoni qanday bo'lishi kerak?

Ychish: x qirqib olinadigan kvadrat tomoni bo'lsin, u holda qutining tagini tashkil qiluvchi kvadratning tomoni $a - 2x$ ga teng. Qutining hajmi:

$$V = x(a - 2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Masalani ychish uchun V funktsiyaning $[0, a/2]$ segmentdagi eng katta qiymatini topish kerak. $V' = a^2 - 8ax + 12x^2$ hosilani topamiz. $V' = 0 \Rightarrow a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ tenglamani yechib, intervalga tegishli $x = a/6$ kritik nuqtani topamiz (ikkinchi $x = a/2$ ildizda quti hosil bo'lmaydi). $x = a/6$ nuqtada ikkinchi hosila $V''(a/6) = (-8a + 24x)_{x=a/6} = -4a < 0$ bo'lgani uchun, bu nuqtada maksimumga erishadi:

$$V_{\max} = \frac{a}{6} \left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 = \frac{2}{27} a^3.$$

Demak: qirrilgan kvadrat tomoni $a/6$ ga teng bo'lsa, qutining hajmi eng katta bo'ladi.

5. Funktsiyalarni tekshirish va grafiklarini chizish

1-ta'rif. Agar ushbu

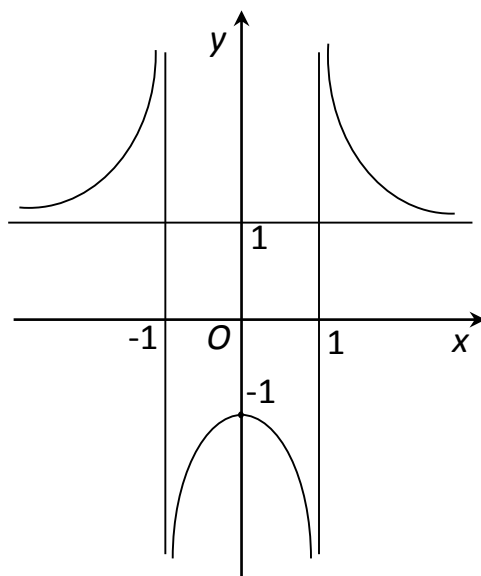
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

limitlardan kamida bittasi cheksiz bo'lsa, u holda $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funktsiyaning vertikal asimptotasi deyiladi.

2-ta'rif. Shunday k, v sonlar mavjud bo'lib, $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) da $y=f(x)$ funktsiya $f(x) = kx + v + \alpha(x)$ ($\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$) ko'rinishda ifodalansa, u holda $u=kx+v$ chiziq og'ma asimptota deyiladi. Agar $k=0$ bo'lsa, $y=v$ gorizontaal asimptota deyiladi.

Funktsiyalarni tekshirish va grafigini chizish quyidagi qoida bo'yicha amalga oshirilsa maqsadga muvofiq bo'ladi.

1. Aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini topish;
2. Uzlaksizligi, uzilish nuqtalarini topish;
3. Juft-toqligi, davriyligini aniqlash;
4. Monotonligini tekshirish;
5. Ekstremumga tekshirish;
6. Asimptotalarini (bor bo'lsa) topish.
7. Ba'zi nuqtalarini yasash.



$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Misol.

funktsiyani tekshiring va grafigini chizing.

- 1) $D(x) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.
- 2) $x = -1$ va $x = 1$ cheksiz uzilish nuqtalari.
- 3) $y(-x) = y(x)$, juft funktsiya.

$$y' = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}, y' < 0 \text{ } x > 0; y' > 0 \text{ } x < 0.$$

4) Demak, $x > 0$ da kamayuvchi va $x < 0$ da o'suvchi bo'ladi.

5) $y' = 0$ dan $x = 0$ nuqta stasionar nuqta bo'ladi. Bu nuqtadan o'tishda hosila ishorasi musbatdan manfiyga o'zgaradi. Demak funktsiya $y(0) = -1$ maksimum qiymatni qabul qiladi.

6) $y = \pm 1$ vertikal asimptotalar.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 1/x^2}{1 - 1/x^2} = 1.$$

Demak,

$y = kx + b$, ya'ni $y = 1$ og'ma (gorizontaal) asimptotadir.

7) Qiymatlar to'plami $E(y) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; $x = \pm\sqrt{2}$ da $y = 3$

Eslatma: 4), 5) bandlar o'rniga, quyidagi jadvalga asosan monotonligi va ekstremiumga tekshirish mumkin.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	> 0	-	> 0	0	< 0	-	< 0
$f(x)$	$\uparrow$	-	$\uparrow$	-1 max	$\downarrow$	-	$\downarrow$

Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma'lumki, tabiat va iqtisodning ko'p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalarni bilish ularning qaysi oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o'xshash tekshirishlar funksiya dinamikasini anglashga olib keladi.

Funksiyaning monotonligi mezonlari (kriteriyasi).

(a, b)

1-ta'rif. oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'suvchi deyiladi.

2-ta'rif. (a, b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya'ni $f'(x) > 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'ladi;

2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya'ni $f'(x) < 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda kamayuvchi bo'ladi.

Misol. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish: Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2), \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

bundan $x_1 = -1, x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo'lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty; -1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo'lsa, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bo'ladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko'ring). Demak, $(-\infty; -1)$ oraliqda funksiya o'suvchi (o'suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1; 2)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0$, bo'lib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1; 2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo'ladi.

$(2; +\infty)$ oraliqning $x = 3$ nuqtasi uchun, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0$, bo'lib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2; +\infty)$ oraliqda o'suvchi.

Funksiyaning ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng yoki uzilishga ega bo'ladigan nuqtalari kritik nuqtalar deyiladi.

3-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega deyiladi.

4-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga ekstremum nuqtalari deyiladi.

Ekstremumga ega bo'lishishinig zaruriy sharti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ nolga teng yoki u mavjud bo'lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Ekstremumning yetarli shartlari.

Birinchi qoida. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

- 1) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya maksimumga;
- 2) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya minimumga ega bo'ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila nolga teng, ikkinchi hosila nol dan farqli bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va :

- 1) $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, maksimum nuqtasi;
- 2) $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, minimum nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, monotonlik oraliqlarini, funksiya ekstremumini topish uchun, oldin funksiyaning aniqlanish sohasini kritik nuqtalar yordamida monotonlik oraliqlariga bo'lish va ularda hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin monotonlik va ekstremumning yetarlilik shartlaridan foydalanib, o'sish va kamayish oraliqlarini, maksimum va minimum nuqtalarini aniqlaymiz.

Misol. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish: Kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = x^2 - x - 6, \quad x^2 - x - 6 = 0, \text{ bunda } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$$

bo'lib, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ bo'ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o'tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3), \quad x < -2 \text{ bo'lsa, } x+2 < 0, x-3 < 0 \text{ bo'lib,}$$

$$(x+2)(x-3) > 0, \text{ bo'ladi, ya'ni ishoramusbat (+). } x > -2 \text{ bo'lsa, } x+2 > 0;$$

$$x-3 < 0, (x+2)(x-3) < 0, \text{ ya'ni ishora manfiy (-). Demak, } x_1 = -2 \text{ nuqtadan}$$

o'tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o'zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo'ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10.$$

$$\text{Endi } -2 < x < 3 \text{ bo'lsa, } (x+2) > 0; (x-3) < 0 \text{ bo'lib, } (x+2)(x-3) < 0,$$

$$\text{hosilaning ishorasi manfiy (-), } x > 3 \text{ bo'lsa, } (x+2) > 0; (x-3) > 0 \text{ bo'lib,}$$

$$(x+2)(x-3) > 0, \text{ musbat (+) bo'ladi. Demak, } x_2 = 3 \text{ nuqtadan o'tishda funksiya}$$

hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya

$$x_2 = 3 \text{ nuqtada minimumga ega bo'ladi.}$$

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

$$\text{Misol. } f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4 \text{ funksiya ekstremumini}$$

ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish: Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$

$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x-1 = 0$$

bundan, $x = 1$ va

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

bo'ladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ bo'ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 > 0,$$

$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 < 0,$$

$$f''(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo'lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1, x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi. $\min f(1) = 0; \quad \max f(2) = 0.25; \quad \min f(3) = 0.$

Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Misol. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2; 3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish: Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$$y' = 4x^3 - 4x, \quad 4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0,$$

bundan, $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo'ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$

$$f(-1) = 4; \quad f(0) = 5; \quad f(1) = 4 \quad \text{va} \quad f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 = 81 - 18 + 5 = 68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{\text{экич}} = 4$, $y_{\text{экам}} = 68$ bo'ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

Misol. Perimetri $2p(p > 0)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to'g'ri to'rtburchakning asosi x bo'lsin. Bu holda to'g'ri to'rtburchakning balandligi $p - x$ ga, yuzi esa,

$$S = S(x) = x(p - x), \quad (0 < x < p)$$

bo'ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$S'(x) = p - 2x, \quad p - 2x = 0, \quad x = \frac{p}{2}$$

kritik nuqta bo'ladi. $S''(x) = -2$; $S''(p/2) = -2 < 0$.

Demak, $S(x)$ funksiya, $x = \frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

$$S_{\max} = \frac{p}{2} \left(p - \frac{p}{2} \right) = \frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ teng bo'lgan kvadratdan iborat ekan.

Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish. Funksiya grafigining asimptotalari.

5-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda qavariq deyiladi.

6-ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda botiq deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari:

2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

Egillish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 absissali nuqta egillish nuqtasi bo'ladi.

Funksiya grafigining asimptotalari.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

yoki

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ and } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx]$$

limitlar mavjud bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k = 0$ bo'lsa, $y = b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

Misol. Gauss egri chizig‘i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish: Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = -2|x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x| = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0, \quad e^{-x^2} \neq 0, \quad 4x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo‘lib, sonlar o‘qini

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ and } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ oraliqlarda } y'' > 0 \text{ bo'lib, } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

oraliqda $y'' < 0$ bo'ladi.

Demak,

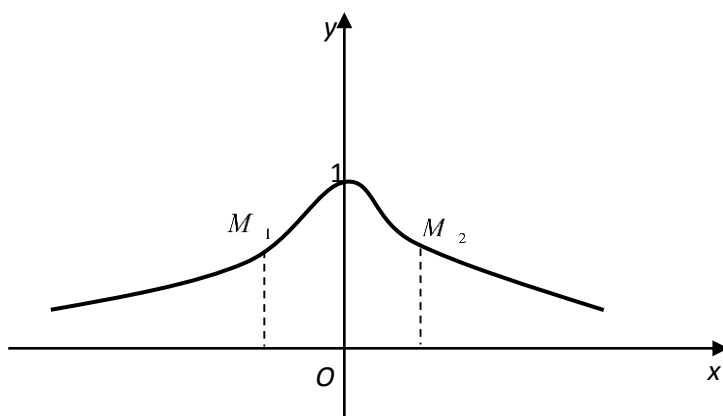
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ va $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq,

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'lib, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi:

$$f_{\text{э2л}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}). \quad f_{\text{э2л}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$$

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.



1-chizma

Funksiyaning tekshirishning umumiy rejasi.

Funksiyaning hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyaning tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

- 1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;
- 2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;
- 3) funksiyaning davriyligini aniqlash;
- 4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;
- 5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;
- 6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;
- 7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;
- 8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;
- 9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;
- 10) imkoniyati bo'lsa funksiya grafigining koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;
- 11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

Misol: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish: Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no'lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1 = -2, x_2 = 2$ nuqtalarda no'lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty, -2), (-2; 2), (2, +\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o'zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

;

$$2) \quad f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

bo'lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x = \pm 2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}, \quad f'(x) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Bundan tashqari $f'(x)$, $x = \pm 2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar:

$$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2\sqrt{3}$$

bo'ladi;

$$6) \quad (-\infty, -2\sqrt{3}), (-2\sqrt{3}, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, 2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, +\infty)$$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty, -2\sqrt{3})$ va $(-2\sqrt{3}, +\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya'ni funksiya bu oraliqlarda o'suvchi; $(-2\sqrt{3}, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, 2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x) < 0$, ya'ni kamayuvchi $x_1 = -2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5 = 2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. $x = 0$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ ishorasi o'zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo'q.

$$\max f(x) = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}; \min f(x) = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3},$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - x^2(x^2 - 12) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4) - 4x^3(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}. \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0, \quad 8x(x^2 + 12) = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

bo'ladi ;

8) oraliqlarda ning ishorasini tekshiramiz:
bo'lsin.

xuddi shunday

bo'lib, oraliqlarda

funksiya grafigi qavariq, oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o'zgartiradi, lekin da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat

nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo'ladi

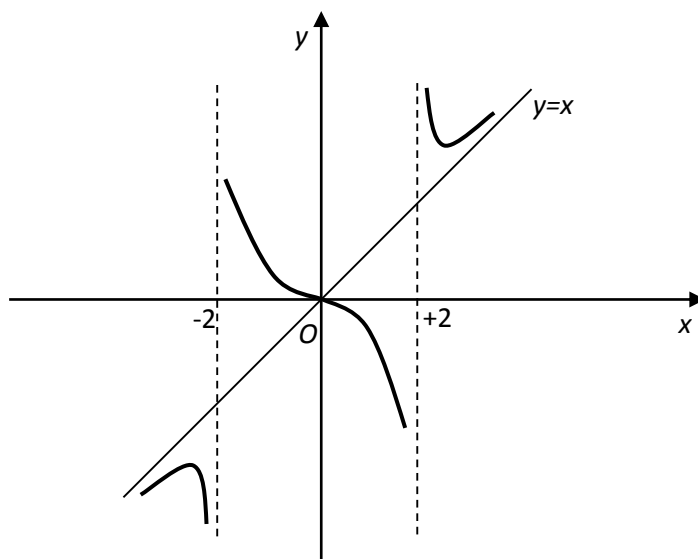
9). funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

Demak, funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo‘ladi.

Shunday qilib, og‘ma asimptota bo‘ladi;

10) bo‘lganda bo‘lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma)



2-chizma

23-mavzu. Boshlang‘ich funksiya. Aniqmas integral. Aniqmas integrallar jadvali. Integrallashning uchta asosiy usullari (yoyish, o‘zgaruvchini almashtirish, bo‘laklab integrallash).

Boshlang‘ich funksiya va uning xossasi. Ma’lumki matematikada amallar juft-juft bo‘lib uchrab keladi. Jumladan, qo‘shish va ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish,

darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensiallash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug‘iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo‘lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to‘g‘ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lsin. Bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich (dastlabki) funksiyasi deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo‘ladi,

chunki $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4 = f(x)$ bo‘ladi.

Aniqmas integral va uning xossalari. Ta’rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, $F(x) + C$ (bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $\int$ integrallash o‘zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang‘ich funksiyalari to‘plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensial esa integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{va} \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarishning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{va} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalarni aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-

xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) o'zgarish ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = \text{const} \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiya algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiya algebraik integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiya asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiya differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiylarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiylarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiylarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiylarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiya boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo'ladi. Funksiya integrallash ya'ni boshlang'ich funksiya topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi asosiy integrallar jadvalini yoddan bilish zarur.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - k}) + C.$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differensial integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \int x^3 dx + 5\int \sin x dx - 9\int dx$ bo'ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3)$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o'zining ixtiyoriy o'zgarmasini qo'shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o'zgarmalar bo'lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + C$$

Integralning to'g'ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonini differensiallash bilan ko'rsatish mumkin. (buni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

Misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

Misol. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) xossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish: Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

O'zgaruvchini almashtirish. Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

Misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo'ladi.

Misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2} x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $1+x^2=t$ o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2x dx = dt$ yoki $x dx = \frac{dt}{2}$ bo'lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

bo'ladi.

Misol. $\int \cos mx dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Bunda $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ o'zgartirish olib,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$$

natijaga ega bo'lamiz. Bunday integrallashga bevosita integrallash deb ataladi.

Chunki $mx = t$ bilan o'zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o'zgaruvchini almashtirib o'tirmasdan uni fikrda bajardik.

Misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\ln x = t$ bilan yangi o'zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

bo'ladi.

Misol. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $x = t^2$ bilan yangi o'zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx = 2t dt$ bo'lganligi uchun,

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2t dt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

bo'ladi. —

Misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \dots$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

Bo'laklab integrallash. Bo'laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko'paytmasi differensial formulasi asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv) = u dv + v du$, bundan $u dv = d(uv) - v du$. Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

natijaga ega bo'lamiz. Shunday qilib,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int u dv$ integraldan ikkinchi $\int v du$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallashni qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo'ladi. du ni topish uchun u ning differensial topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differentsiallashtirish bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallashtirish formulasi ko'proq:

$$1) \int p(x)e^{ax} dx, \int p(x)\sin mx dx, \int p(x)\cos ax dx \quad \text{va}$$

$$2) \int p(x)\ln x dx, \int p(x)\arcsin x dx, \int p(x)\arccos x dx, \int p(x)\arctg x dx, \int p(x)\operatorname{arcctg} x dx$$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko'phad) ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko'phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \arctg x, \operatorname{arcctg} x \text{ lar,}$$

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo'laklab integrallashtirishga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\int x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Integral ostidagi ifodani $u = x, dv = \cos x dx$ deb

Bo'laklasak, $du = dx, v = \int \cos x dx = \sin x$ bo'lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$u \quad dv \quad u \quad v \quad v \quad du$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x dx$ hosil bo'ldi, bu jadval integrali bo'lganligi uchun osongina topildi.

Misol. $\int x^2 e^{3x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Yuqorida eslatilganidek $u = x^2, dv = e^{3x} dx$ ko'rinishda bo'laklab olsak,

$$du = 2x dx, v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

hosil bo'ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

bo'ladi. Oxirgi hosil bo'lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo'laymiz.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] = \frac{e^{3x}}{3} \left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) +$$

$$+ C$$

hosil bo'ladi.

Misol. $\int x^3 \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya'ni $u = \cos 2x$, $dv = x^3 dx$ bo'laklab olaylik; bu holda

$$du = -2 \sin 2x dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \quad \text{bo'lib (1) formuladan foydalangandan}$$

keyin

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ifoda hosil bo'ladi. Keyingi $\int x^4 \sin 2x dx$ integral berilgan $\int x^3 \cos 2x dx$ integralga nisbatan murakkabroqdir (x ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo'laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya'ni $u = x^3$, $dv = \cos 2x dx$ deb olish kerak edi. (Bu integralni hisoblashni o'quvchiga havola qilamiz).

Misol. $\int \arccos x dx$ integralni hisoblang.

$$\begin{aligned} \int \arccos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \\ &+ C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Yechish:

Bu integralda bir marta bo‘laklab integrallagandan keyingi hosil bo‘lgan integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo‘llashda o‘zgaruvchini almashtirganda yoki bo‘laklab integrallaganda yozuvda tartib bo‘lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

Misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Bo‘laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo‘ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o‘xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo‘laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo‘llash bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo‘lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik.

Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ëku} \quad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

$$1. \int \sin 3x dx. \quad 2. \int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx.$$

$$3. \int e^{-x^3} x^2 dx. \quad 4. \int \frac{x^2}{1+x^3} dx. \quad 5. \int (e^x + e^{-\frac{x}{2}}) dx. \quad 6. \int \frac{dx}{\sin^2 5x}.$$

$$7. \int (5-2x)^9 dx. \quad 8. \int \sqrt[3]{7-3x} dx. \quad 9. \int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx. \quad 10. \int \cos(1-3x) dx.$$

$$11. \int \sin(5x+7) dx. \quad 12. \int \frac{2x}{x^2+1} dx. \quad 13. \int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 14. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$$

$$15. \int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx. \quad 16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}. \quad 17. \int x^2 \sin x dx. \quad 18. \int x \ln x dx. \quad 19. \int \arctg x dx.$$

$$20. \int \arcsin x dx. \quad 21. \int x^2 e^{2x} dx. \quad 22. \int e^x \sin x dx. \quad 23. \int (x+3) \sin x dx.$$

$$24. \int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx. \quad 25. \int x \arctg x dx. \quad 26. \int \frac{dx}{(3x+1)^3}. \quad 27. \int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx.$$

24-mavzu. Kvadrat uchhad qatnashgan ba'zi funksiyalarni integrallash.

Ratsional kasrlarni integrallash.

To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar haqida. Yuqorida ko'rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo'lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma'lumki, har qanday ratsional funksiyaning ushbu ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Curatdagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik, ya'ni $m < n$ bo'lsa, berilgan kasrga to'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi. Suratdagi ko'phadning darajasi $m \geq n$ bo'lsa, noto'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi. Kasr noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to'g'ri kasr ratsional

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$$

funksiyaga keltirish mumkin. Masalan, noto'g'ri kasr ratsional

funksiyani, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ko'p hadni $x^2 - x$ ko'p hadga bo'lib,

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun ratsional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri ratsional kasr funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

To'g'ri kasr ratsional funsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k > 1$ *большая степень*); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ($\frac{p^2}{4} - q < 0$ ya'ni,

kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n > 1$ butun son, $\frac{p^2}{4} - q < 0$) ratsional to'g'ri kasrlarga sodda

kasr ratsional funksiyalar deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya'ni,

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

bo'ladi.

Endi ushbu

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$$

integralni hisoblaymiz.

Oldin xususiyl hol $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to'la

kvadrat ajratib, $x + \frac{p}{2} = t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| x + \frac{p}{2} = t \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)},$$

bu yerda $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \quad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax + B = (2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

shakl o'zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{(2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} = \ln|x^2 + px + q| + C_1$$

bo'lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_2.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Integral ostidagi funksiya noto'g'ri kasr ratsional funksiya iborat.

Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 \\ x^4 + 9x^2 \\ \hline -9x^2 \\ -9x^2 - 81 \\ \hline 81 \end{array} & \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} \end{array}$$

$$\text{Demak, } \frac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}$$

bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9} dx = \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$\text{Misol. } \int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx \quad \text{integralni hisoblang.}$$

Yechish: Maxrajdagi kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratamiz:
 $x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x-4)^2 + 9$, hamda $x-4=t$, $dx=dt$
 almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx &= \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C. \end{aligned}$$

To'g'ri kasr ratsional funsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash.

$$\frac{R(x)}{P(x)}$$

to'g'ri kasr ratsional funksiyaning maxrajini

$$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \dots (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \dots, \quad \text{ko'rinishda}$$

ifodalash mumkin bo'lsa, bu funksiyaning yagona

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{P(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \dots + \\ &+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{(x^2+2kx+\ell)} + \dots + \frac{F_mx+E_m}{(x^2+2kx+\ell)^m} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $r, s, \dots, t, m$, musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ , haqiqiy sonlar.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to'g'ri ratsional funksiyaning sodda kasrlar orqali yoyilmasi deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$

koeffitsientlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko'paytiramiz. $R(x)$ ko'phad bilan (1) yoyilmaning o'ng tomonida hosil bo'lgan ko'phad o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsientlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, noma'lum koeffitsientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffitsientlarni topamiz.

Ratsional funkiya yoyilmasidagi noma'lum koeffitsientlarni bunday usul bilan topishga noma'lum koeffitsientlar usuli deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

Misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ ratsional funksiyaning sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish: Maxrajni $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo'yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko'paytirib $2x-1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$ *ëku* $2x-1 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik.

Bundan $A_1 = 5, A_2 = -3$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

Misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ ratsional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish: (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1 = A_1(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \text{ëku}$$

$$x^2-1 = (A_1+M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1+M_1+M_2)x^2 + (N_1+N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffitsientlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1 = 0, N_2 = 0, A_1 = -1, M_1 = 1, M_2 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

Misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C$$

bo‘ladi.

Misol. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to‘g‘ri ratsional funksiyani sodda kasrlar yig‘indisi shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko‘paytirib,

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad \text{ëku} \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0 \\ x^1 & 2A+B=1 \\ x^0 & 2B=-2 \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{l} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ B=-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A=1 \\ C=-1 \end{array}$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

bo'лади.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu ratsional funksiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{x^3}{x-3} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{x^2+25} dx; \quad 3) \int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)} dx; \quad 4) \int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx;$$

$$5) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad 6) \int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx; \quad 7) \int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx; \quad 8) \int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

25-mavzu. Trigonometrik va irratsional funksiyalarni integrallash.

Irratsional funksiyalarni integrallash ko'p hollarda o'zgaruvchini almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irratsional funksiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1. $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ ko'rinishdagi integral ni hisoblash talab etilsin, bunda m, n, p ratsional sonlar, a va b lar no'ldan farqli o'zgarmaslar.

1) p musbat butun son bo'lsa, Nyuton binomi bo'yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo'lsa, $a + bx^n = t^s$ almashtirish orqali ratsionallashtiriladi, bunda $s \cdot p$ kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun bo'lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinib, ratsional funksiyaga keltiriladi.

Misol. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Integralni $\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3}) dx$ ko'rinishida yozib,

$$m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

bo'lganligi uchun $(1 + x^{1/3}) = t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3} = t^2 - 1, \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = 2t dt, \quad x^{-2/3} dx = 6t dt$$

bo'ladi. Bularni berilgan integralga qo'ysak,

$$\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3})^{1/2} dx = \int t \cdot 6t dt = 6 \int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2(1 + \sqrt[3]{x})^{3/2} + C$$

bo'ladi.

Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx, \quad m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$

$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (butun) bo'lganligi uchun $x^{-4} + 1 = t^4$ almashtirish olsak,

$x = (t^4 - 1)^{-1/4}, \quad dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-5/4} dt, \quad \sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-1/4}$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C,$$

$t = \sqrt[4]{1+x^4}$ bo'lganligi uchun,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} \right| - \frac{1}{2} \arctg \sqrt[4]{1+x^4} + C$$

bo'ladi.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko'rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratish

bilan $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}$ jadval

integrallaridan biriga keltiriladi.

Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ integralni hisoblang.

Yechish: $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4$ to'la kvadrat ajratib,

$x+1 = u$ desak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + 4}| + C = \ln |(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C$$

bo'ladi.

3) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko'rinishdagi integral, $\frac{1}{x+\alpha} = t$ almashtirish orqali 2. ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

Misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\frac{1}{x+1} = t$ bilan almashtirsak,

$$t(x+1) = 1, tx + t = 1, tx = 1 - t, x = \frac{1-t}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + 2\frac{1-t}{t} + 2}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2} + \frac{2-2t}{t} + 2}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \end{aligned}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. Maktab kursidan ma'lum bo'lgan trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini, yig'indiga keltirish

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

formulalardan foydalanib, (1) ko'rinishdagi integrallarni

$$\int \sin ax dx, \int \cos bx dx$$

integrallarga keltirib integrallanadi.

Misol. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Yuqoridagi formulalarning birinchisidan

$$\sin 2x \cos 7x = \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.$$

natijaga ega bo'lamiz.

Misol. $\int \cos 7x \cos 3x dx$, $\int \sin 4x \sin 2x dx$, $\int \sin 5x \cos 3x$ integrallarni mustaqil hisoblang.

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash. Bunda m, n lar butun sonlar. Xususiyl hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

Misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $\sin x dx = -d(\cos x)$ va $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ekanligini hamda $\cos x = z$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

Misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish: $\sin x dx = -d \cos x$ bo'lgani uchun, $t = \cos x$ almashtirish olsak,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

bo'ladi.

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

Misol. $\int \sin^2 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Bu integralni izohlarsiz hisoblaymiz:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Trigonometrik funksiyalarning darajalarini pasaytirish formulalaridan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx = \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) dx = \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar. Biz yuqorida elementar funksiyalarni o'z ichiga olgan muhim integrallash usullarini ko'rdik. Lekin praktikada faqat shu usullardan aynan foydalanamiz degan fikr bo'lmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, integral ostidagi funksiyaning berilishiga qarab unga mos mulohazalardan foydalanish kerak. Masalan,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} dx &= \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\
&= \ln|x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C
\end{aligned}$$

yoki

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C$$

integrallashni bajarish mumkin.

Juda ko'p integrallarni hisoblashda ayrim xususiy usullardan foydalanib oldingi hisoblangan integrallarga keltiriladi. Shuning uchun praktikada integrallashda tayyor qo'llanmalardan foydalanish ham mumkin. Masalan [Yu.A. Brichkov, O.I. Marichev, A.P. Prudnikov. Tablisi neopredelyonnix integralov. M.: Nauka 1986-1992s].

Integrallashning bayon etilishidan ma'lumki integrallash texnikasi differensiallashdan murakkabroqdir. Shuning uchun ham integrallashda shunday ko'nikmalar kerakki, bunga ko'p sonidagi misollarni yechish natijasida erishish mumkin.

Ma'lumki differensial hisobda istalgan elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin edi va u yana elementar funksiyalar bilan ifodalanar edi. Integral hisobda esa masala boshqacharoq bo'lib, ko'plab

misollar keltirish mumkinki, integral $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'lishiga qaramasdan, ular elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Bunday integrallar yaxshi o'rganilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun tayyor jadvallar, grafiklar tuzilgan.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu ratsional funksiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{x^3}{x-3} dx; \quad 2) \int \frac{x^4}{x^2+25} dx; \quad 3) \int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)} dx; \quad 4) \int \frac{2x+9}{x^2+x+2} dx;$$

$$5) \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad 6) \int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx; \quad 7) \int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx; \quad 8) \int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx.$$

2. Ushbu irratsional funksiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx; \quad 2) \int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx; \quad 3) \int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}; \quad 5) \int \frac{\sqrt{x}+3}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$$

3. Ushbu integrallarni hisoblang.

$$1. \int \sin 3x \sin 7x dx \quad . \quad 2. \int \sin 5x \cos 3x dx \quad . \quad 3. \int \sin x \sin 3x dx.$$

$$4. \int \sin 3x \cos 2x dx. \quad 5. \int \cos 4x \cos 2x dx. \quad 6. \int \sin 3x \cos x dx.$$

$$7. \int \sin x \cos^4 x dx. \quad 8. \int \sin^3 x \cos^3 x dx. \quad 9. \int \sin^2 5x dx.$$

$$10. \int \cos 7x \cos 3x dx. \quad 11. \int \sin 4x \sin 2x dx.$$

$$12. \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \quad 13. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx. \quad 14. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}.$$

26-mavzu. Aniq integral. Quyi va yuqori integral yig'indilar. Aniq integral va uning asosiy xossalari. Aniq integralni hisoblash.

N'yuton—Leybnis formulasi.

Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida. Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.

Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi

Masala. Material nuqta F o'zgaruvchan kuch ta'sirida OX o'qi bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. F kuch ta'sirida material nuqta a nuqtadan b nuqtaga o'tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch X ning funksiyasi bo'ladi. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.

Yechish: $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali $[x_{i-1}, x_i]$ qismaniy kesmalarga ajratamiz.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{F}} \\ 0 \qquad a = x_0, \quad x_1, \dots, \quad x_n = b \qquad X \end{array}$$

1-chizma.

Mexanikadan ma'lumki kuch o'zgarmas bo'lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot l$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qismaniy kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$ larni hisoblaymiz ($i = 1, n$). Bunda har bir qismaniy kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i) \Delta x_i$$

bo'lad. $[a, b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

bo'lad.

$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \quad (1)$$

bo'lad.

Shunday qilib, F o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash uchun (1) ko'rinishdagi cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko'p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi. Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, n$ qismaniy kesmalarga ajratamiz, har bir qismaniy kesmada bittadan $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz. Bu yig'indiga $y = f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi.

$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

1-ta'rif. $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ integral yig'indi $[a, b]$ kesmaning $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) qismaniy kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda $\lambda \rightarrow 0$ da chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi aniq integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchi ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

Aniq integralning asosiy xossalari:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx;$$

2) o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx ;$$

3) $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

bo'ladi;

4) $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi;

5) $c \in [a, b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi;

$$7). \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$8). \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$9). \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn \quad \text{bo‘ladi;}$$

10) $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunga o‘rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

Aniq integralni hisoblash. N’yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig‘indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog‘lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x)$, $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

formula o‘rinli bo‘lib, bunga Nyuton-Leybnis formulasi deyiladi. Bundan foydalanib aniq integralning kattaligi hisoblanadi.

Shunday qo'yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang'ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to'laroq shug'ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o'z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

Misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$.

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik, buning

o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyani olamiz.

Misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ integralni hisoblang:

Yechish: $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \int_0^5 x\sqrt{x+4} dx &= \int_2^3 (t^2 - 4)t \cdot 2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2) dt = 2 \int_2^3 t^4 dt - 8 \int_2^3 t^2 dt = 2 \left. \frac{t^5}{5} \right|_2^3 - 8 \left. \frac{t^3}{3} \right|_2^3 = \\ &= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) - \frac{8}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Demak, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

Misol. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ integralni hisoblang.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

Yechish: Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_2^4 (x^3 + x) dx$.
2. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$.
4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$.
5. $\int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$.
6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$.
7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$.
8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$.
9. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.
10. $\int_{\pi}^0 x \cos x dx$.

27-mavzu. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish va Bo'laklab integrallash. Xosmas integrallar.

Aniq integralning ta'rifiga asosan, ya'ni cheksiz ko'p sondagi cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog'lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x)$, $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

formula o'rinli bo'lib, bunga Nyuton-Leybnis formulasi deyiladi. Bundan foydalanib aniq integralning kattaligi hisoblanadi.

Shunday qo'yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang'ich funksiyaning topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to'laroq shug'ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o'z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

Misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$.

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik, buning

o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyaning olamiz.

Misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ integralni hisoblang:

Yechish: $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t^2-4)t2tdt = \int_2^3 (2t^4-8t^2)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^3 - 8\left.\frac{t^3}{3}\right|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{5}(3^5-2^5) - \frac{8}{3}(3^3-2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Demak, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

Misol. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$ integralni hisoblang.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

Yechish: Bo'laklab integrallash

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

Xosmas integrallar: Aniq integralning ta'rifida integrallash chegaralari

chekli va integral ostidagi funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan deb olingan edi. Bu shartlardan hech bo'lmaganda birortasi bajarilmasa, integralning yuqoridagi ta'rifi ma'nosini yo'qotadi.

Biroq nazariy va amaliy mulohazalarga muvofiq aniq integralning ta'rifi bu cheklanishlar bajarilmaydigan hollar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

Bunday integrallar bizga tanish bo'lgan aniq integrallarga xos bo'lmagan qisqacha xosmas integrallar deb aytiladi.

Xosmas integrallarning ikki asosiy turini qaraymiz:

Uzluksiz funksiyalarning cheksiz oraliq bo'yicha integrallari. $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda berilgan va uning istalgan qismi $[a, +A]$ da integrallanuvchi, ya'ni istalgan $A > a$ da aniq integral mavjud bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = J$$

limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, \infty)$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J = \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (9)$$

J limit chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Limit mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty, a]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral ham xuddi yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx \quad (10)$$

$f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral qo'yidagicha aniqlanadi.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx \quad (11)$$

bu yerda a istalgan son. (11) integrallarda o'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashsa chap tomondagi integral ham yaqinlashuvchi deyiladi. O'ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashsa, chap tomondagi integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Xosmas itegrallarni hisoblash uchun Nyuton-Leybnis formulasidan foydalaniladi. $F(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [F(A) - F(a)] = F(+\infty) - F(a) = F(x)$$

bo'lib, bu yerda: $F(+\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ integralning yaqinlashishini yoki uzoqlashishini aniqlaydi.

Misol. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)}$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Yechish:

Demak, integral yaqinlashuvchi va $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

Misol. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$

bo'lib, bu integral uzoqlashuvchi.

Chegaralanmagan funksiyalarning chekli oraliq bo'yicha xosmas integrallari. $(a, b]$ intervalda uzluksiz va $x = a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanib aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (12)$$

Oxiri limit mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Bunday integrallarga 2-tur xosmas integral deyiladi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, Nyuton - Leybnis formulasini qo'llash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, $x \rightarrow a$ da $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$[a, b)$ intervalda $x = b$ nuqtada uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya xosmas integrali ham shunga o'xshash bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = F(b) - F(a).$$

bunda $F(b)$, $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning $x \rightarrow b$ dagi limiti.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmaning biror $x = c$ nuqtasida uzilishga ega bo'lsa xosmas integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (13)$$

O'ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchidir. O'ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi bo'lsa, chap tomondagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ demak,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2 \cdot 2 = 4$$

Demak, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral yaqinlashuvchi.

Misol. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \rightarrow 0$ da $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \rightarrow +\infty$, $x = 0$ nuqta $[-1, 8]$

kesmaning ichki nuqtasi. (13) formuladan foydalansak,

$$\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^8 = 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{-1} = 3 - (-3) = 6$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

28-mavzu. Aniq integralning geometrik tatbiqlari. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi.

Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash $y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan chegaralangan figuraga egri chiziqli trapesiya deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi

Umumiy hol, ya'ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (2)$$

aniq integralga teng bo'ladi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x dy = \int_c^d \varphi(y) dy \quad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, yuza

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \quad (4)$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Misol. $xy = 8, x = 1, x = e, y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish: $y = \frac{8}{x}$ bo'lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8 \ln x \Big|_1^e = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

Misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish:
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0, x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining absissalari bo'lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2] dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}$$

bo'ladi.

Misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish: Ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib,

hamda $x = 3 \cos t$ tenglamada $x = 0, x = 3$ bo'lganda $t_1 = \frac{\pi}{2}, t_2 = 0$ bo'lganligini hisobga olib,

$$S = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (-3 \sin t) dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= 12t_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2} \sin 2t_0^{\frac{\pi}{2}} 12 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 6(\sin \pi - \sin 0) = 6\pi.$$

Egri chiziqli yoyi uzunligini hisoblash. To'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada silliq (ya'ni $y = f(x)$ hosilasi uzluksiz) bo'lsa, bu egri chiziqli yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziqli parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziqli qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

Misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}} y' = 0 \quad \text{bundan,} \quad y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\sqrt[3]{y} / \sqrt[3]{x}\right)^2} dx = \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 4 \sqrt[3]{a} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = 4 \sqrt[3]{a} \left. \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_0^a = 4 \frac{3}{2} \sqrt[3]{a} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - 0 \right) = 6a. \end{aligned}$$

Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \quad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

Misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish: Masala shartiga ko'ra x o dan 3 gacha o'zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi.$$

Misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish: Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$$x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ bo'lib, integralning chegaralari } c = -b, d = b \text{ bo'ladi. (8)}$$

formulaga asosan,

$$V_y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^b dy - \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^b - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^b =$$

$$= \pi a^2 [b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2} [b^3 - (-b)^3] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

Demak,
$$V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$a = b = R$ bo'lsa, shar hosil bo'lib
$$V_{uu} = \frac{4}{3} \pi R^3$$
 bo'ladi.

Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz.

1) Ma'lumki, mehnat unumdorligi ish kuni mobaynida o'zgaruvchi miqdordir.

Mehnat unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig'i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) mehnat unumdorligini bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Vaqtning (3,4) oralig'ini eng kattasining uzunligi Δx bo'lgan oraliqlarga bo'lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o'zgarmas desak ishlab chiqarish mehnat unumdorligini $f(x) \Delta x$ ko'paytmaga teng bo'ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_3^4 f(x) \Delta x = \int_3^4 f(x) dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2) Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan mahsulot miqdorini $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo'lsa, x dan $x + \Delta x$ vaqt oralig'idagi omborga $f(x) \Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi tovarning zahirasi

$$\int_0^x f(x) dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o'zgarmas a ga teng bo'lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo'lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t a dx = [ax]_0^t = at$$

bo'ladi. Agar mahsulot ishlab chiqarish hajmi arifmetik progressiya bo'yicha o'suvchi ya'ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo'lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x) dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik daromad t vaqtning funksiyasi $D = f(x)$ bo'lsin. Protsent (foiz) me'yori ulushi i bo'lib, foizlar ustiga qo'shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag' bilan boshlang'ich mablag' orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig'i t ni n ta teng bo'laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig'ida daromadni o'zgarmas deb $f(t)$

Δt ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo‘shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0, t)$ vaqt oralig‘idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_0^t f(t)e^{-it} \Delta t = \int_0^t f(t)e^{-it} dt$$

bo‘ladi.

Xususiyl holda, yillik daromad o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $f(x) = a$ bo‘lsa, diskontli daromad

$$d = \int_0^t a e^{-it} dt = a \int_0^t f e^{-it} dt = a \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i} (1 - e^{-it})$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = 0$; 2) $x = 4 - y^2$, $x = 0$; 3) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1$, $x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2$, $x = 0$; 6) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$;

7) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; 8) $x = 3t^2$, $y = t^3 - t^3$.

2. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x + 4)^3$ va $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

4. $\int_0^1 x^2 dx$ integralni $n = 5$ bo'lakka bo'lib, trapesiyalar

formulasi bilan hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

5. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ integralni $n = 10$ teng bo'laklarga bo'lib, trapesiyalar va Simpson

formulalari yordamida hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

6. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^\infty e^{-x} dx$; 4) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$;

5) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x}$; 6) $\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

7. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; 5) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$; 6) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$.

29-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funksiya funksiya tushunchasi. Xususiy hosila va to'la differensial

Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar haqida umumiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko'p masalalar borki o'zgaruvchi miqdorlar bog'lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x va y dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o'zgarishi bilan o'zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o'lchovining o'zgarishi bilan o'zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga

o'g'it berishga, sug'orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko'p faktorlarga; sigirdan sog'ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday yem-xashak bilan boqilishiga va hokozolarga bog'liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog'lanishlarni tekishirish uchun ko'p o'zgaruvchili (argumentli) funksiyalar tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish apparati amallarini o'rganamiz.]

Ta'rif. R^2 fazoda biror D to'plamning bir-biriga bog'liq bo'lmagan x va y o'zgaruvchilari har bir (x,y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko'ra E to'plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda ikki x va y o'zgaruvchilarning funksiyasi Z aniqlangan deyiladi. Ikki o'zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x,y)$ $z = F(x,y)$ (funksiya U yoki y bilan o'zgaruvchilar mos ravishda x,t yoki x_1, x_2 lar bilan belgilangan bo'lsa $U = f(x,y)$ yoki $y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda x, y o'zgaruvchilarga erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, Z ga erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to'plamga funksiyaning aniqlanish sohasi, E to'plamga o'zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o'rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

Ikki o'zgaruvchili funksiya berilish usullari ham, bir o'zgaruvchili funksiyaga o'xshash har xil bo'lishi mumkin. Ko'proq funksiyaning analitik usulda berilishini qaraymiz. Masalan. 1) bu funksiya analitik usulda bo'lib, $O X_1 X_2$ tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O'zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo'ladi.

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo'lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 \leq 4$ bo'lishi kerak, bunday nuqtalar to'plami

markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan doiradan iborat. Qiymatlar

to'plami $[0, 2]$ bo'ladi. 3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ funksiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya'ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo'lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to'plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z=f(x,y)$ bo'lgan sirtini ifodalaydi. Masalan: 1) $z= 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x+3y-z-12=0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo'lib,

$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

Ta'rif . D to'plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo'yicha E to'plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, D to'plamda uch o'zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o'zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o'zgaruvchining fuksiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib, $u = f(x, y, z)$ o'rniga, $u = f(P)$

deb yozish ham mumkin. Uch o'zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to'plami yoki butun fazo bo'lishi mumkin. Masalan:

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To'rt o'zgaruvchili va umuman n o'zgaruvchili funksiya xam yuqoridagidek ta'rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda

$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ yoki $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bilan

belgilanadi.

To'rt va undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko'rgazmali namoyish etish mumkin emas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo'lmasa $\mathcal{V}$ yo'q deyish mumkin emas. Masalan, to'rtinchi o'zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k bo'lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom ettirib n o'zgaruvchining funksiyasini biror n o'lchovli fazo $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

Ikki va ko'p argumentli funksiya limiti. $y = f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o'z ichiga olgan oraliq bo'lar edi. Ikki argumentli $z = f(x, y)$ funksiya qaralganda nuqtaning atrofi deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda biror radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning atrofi ham shunga o'xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada hamda biror radiusli sharning ichki nuqtalari bo'ladi.

n o'lchovli ($n \geq 3$) fazoda $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaning atrofi shunga o'xshash aniqlanadi.

Ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsa (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$

uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A o'zgarmas son $z = f(x, y)$ funksiyaning $P \rightarrow P_0$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x, y)$ funksiyaning limiti bo'lsa, $|f(x, y) - A|$ ayirma $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Uch va undan ortiq o'zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi. Bir necha o'zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo'lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremlar bir necha o'zgaruvchining funksiyasi uchun ham o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Misol. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$ limitni hisoblang.

Yechish: $P_0(2;0)$ nuqtada $\frac{\sin xy}{y}$ funksiya aniqlanmagan. Limitning xossaligidan

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2$$

chunki $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

Ikki va ko'p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi. 1-ta'rif $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

bo'lsa, ya'ni funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi bo'lsin.

Ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lsa, argumentlarning Δx va Δy cheksiz kichik orttirmalariga

funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$

bo'lsa, funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar uzilish nuqtalari deyiladi. Ikki o'zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

Misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning $P_0(2;3)$ nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish: Bu nuqtada funksiyaning to'liq orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta z &= (2 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta y)^2 - (2^2 + 3^2) = 2^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 + \\ &+ 3^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 - 2^2 - 3^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 \end{aligned}$$

2-ta'rifga asosan $\lim \Delta z = \lim [2\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta y + \Delta y^2] = 2 \cdot 0 + 0 + 6 \cdot 0 = 0$.

Shunday qilib, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta z \rightarrow 0$. Demak, $P_0(2;3)$ nuqtada berilgan funksiya uzluksizdir. Bu holatni istalgan $P_0(x_0; y_0)$ uchun ko'rsatish mumkin. (Bu o'quvchiga havola etiladi). $z = f(x, y)$ funksiya biror to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, unga bu to'plamda uzluksiz deyiladi.

$$z = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

Misol. funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Yechish: Funksiya koordinatalari $z^2 - y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzilishga ega. Bu $y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar bo'lib, bu to'g'ri chiziqlarga tegishli har bir nuqtada funksiya uzilishga ega bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ham bir o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ega bo'lgan asosiy xossalarga ega bo'ladi. (Bu xossalarni takrorlash o'quvchiga tavsiya etiladi).

2-o'zgaruvchili funksiya xususiy va to'la orttirmalari.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyada x o'zgaruvchiga biror orttirma berib, y ni o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya uchun $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'liq orttirma oladi.

2-o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari.

a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ Ta'rif. chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning x

o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y

o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funksiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiy hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

endi x ni o'zgaras deb $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

Misol. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyani xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

To'la differensial. Ma'lumki, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning Δx larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning to'la differensial deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to'la differensial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda To'la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$, bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (2)$$

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensial

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Misol. $z = \ln(x^2 + y^2)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) formulaga asosan, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ bo'ladi.

Misol. $u = x^2 y z^2$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 y z^2)'_x = y z^2 (x^2)'_x = 2x y z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y z^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 y z^2)'_z = y x^2 (z^2)'_z = 2x^2 y z.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2x y z^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 y z dz$ bo'ladi.

Misol. O'lchovlari $a=8\text{m}$ $b=6\text{m}$ $c=3\text{m}$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o'zgaradi.

Yechish: Parallelepipedning hajmi $v = xyz$ x, y, z uning o'lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yx dx + xz dy + xy dz$$

$$\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0.15) = -4.2.$$

Shunday qilib, hajm taxminan 4.2 m^3 ga kamayadi.

Misol. To'la differensial formulasidan foydalanib:

$$1) \arctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), \quad 2) \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To'la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy

hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

$$1) \quad \text{ifoda} \quad \text{arcctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right) \quad f(x, y) = \text{arcctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) \quad \text{funksiyaning } P_1(1.97; 1.02)$$

nuqtadagi qiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0 = (2; 1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$, $\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo'ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y) = \left[\text{arcctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = - \frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[\text{arcctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = - \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x^2 - y^2))}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_x(2; 1) = - \frac{1}{1 + (2 - 1)^2} = -0.5; \quad f'_y(2; 1) = \frac{2}{1 + (2 - 1)^2} = 1.$$

(2) dan foydalansak,

$$\text{arcctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right) \approx \text{arcctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$$

bo'ladi.

$$2) \quad \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \quad \text{ni} \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z} \quad \text{funksiyaning } P_1(1.04; 1.99; 1.02)$$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1; 2; 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1; 2; 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot (-0,01) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,05$$

natijani olamiz.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.

$z = f(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$ va $f_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy xosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyaning m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n - m)$ marta y o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.

Misol. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.$$

Ikkinchi tartibli to'la differensial $d(dz) = d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

Misol. $z = x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$z'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini aniqlang va uning qandayligini izohlang:

$$1) u = \sqrt{1-x^2-9y^2}; \quad 2) u = \frac{1}{2x^2+3y^2}; \quad 3) u = \ln(x+y);$$

2. Quyidagi limitlarni hisoblang.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}.$$

3. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping: 1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

$$2) z = \frac{xy}{x-y}; \quad 3) u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z};$$

$$4) z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{y}.$$

4. Quyidagi funksiyalarning to'la differensiallarini toping:

$$1) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad 2) u = x^{y^2z}; \quad 3) z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$4) u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}; \quad 5) s = x \ln t.$$

5. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ bo'lganda dz va Δz larni hisoblang.

30-mavzu. Fazoda egri chiziqqa o'tkazilgan urinma tekislik va normalni aniqlash. Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradient. Divergensiya. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning tadbiqlari.

Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

Ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_1(x_1, y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1, y_1) < f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_1(x_1, y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

Ekstremumning yetarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

bilan belgilaymiz va $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1) $A < 0$ bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga, 2) $A > 0$ bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

Misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

Demak, uchta $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz,

boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

$O(0,0)$ nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz:

$A = -4, B = 4, C = -4; \Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 16 = 0$ bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham

bo'lishini ko'ramiz, masalan OX o'qi bo'yicha ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$, bissektisa bo'yicha

$$f(x, y)|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, $O(0,0)$ biror atrofida $\Delta f(x, y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ demak $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada funksiya

minimumga ega. $f_{\min} = -8$;

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun $A = 20, B = 4, C = 20$

bo'lib $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min} = -8$

Misol. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funksiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1) = 0$;

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

Misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo'lib, $P_0(-1, -1)$ kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Funktsiyani soxa chegarasida tekshiramiz: AO chegarada $y = 0$ bo'lib, $z = x^2 + x$ funksiya hosil buladi. Bu funksiyaning ekstremumi:

$$z'_x = 2x + 1 = 0,$$

$$x = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, $P_1(-0,5, 0)$ AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya hosil bo'lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ $y = -1/2$.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi

$y = -3 - x$ bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo'lib

$z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak,

AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1 ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} ;$$

$$z_4 = f(O) = f(0, 0) = 0 ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6 ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6 .$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz

Funksiyaning berilgan yo‘nalish bo‘yicha hosilasi va gradienti.

Bu yerda ham soddalik uchun uch o‘lchovli D sohada anqlangan $u = f(x; y; z)$ uch o‘zgaruvchili funksiyani qaraymiz. Shu bilan birga qaralayotgan uch o‘lchovli fazoda biror $\vec{l}$ yo‘nalish berilgan deb faraz qilamiz. Agar D sohaning tayinlangan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasini $\vec{l}$ yo‘nalish bo‘yicha $M(x; y; z)$ nuqtaga qo‘zg‘atsak va bunda M_0M kesma D sohada to‘lig‘icha yotadi deb faraz qilsak, shu yo‘nalish bo‘yicha funksiya orttirmasiga ega bo‘lamiz. Endi M nuqta M_0 ga $\vec{l}$ yo‘nalishni saqlagan holda cheksiz yaqinlasha borsin. Agar

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M_0M \uparrow \vec{l}}} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0; M)}$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(M)$ ning M_0 nuqtadagi $\vec{l}$ yo‘nalish bo‘yicha hosilasi deb ataladi va

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial l}$$

kabi belgilanadi. Bu yo‘nalish bo‘yicha hosila berilgan yo‘nalish bo‘yicha funksiyaning «o‘zgarish tezligi» dan iborat ekanligini payqash qiyin emasdir.

Bu o‘rinda $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ xususiy hosilalarni mos ravishda Ox, Oy, Oz o‘qlarining yo‘nalishi bo‘yicha hosilalar ekanligini aytamiz.

Endi $\vec{l}$ yo‘nalish koordinatalar o‘qlari bilan

$$\alpha = (\vec{l}; ^\wedge Ox), \quad \beta = (\vec{l}; ^\wedge Oy), \quad \gamma = (\vec{l}; ^\wedge Oz)$$

burchaklar tashkil qiladi deylik (13.11.1-rasm), hamda $u = f(x; y; z)$ funksiya M_0 nuqtada barcha argumentlari bo‘yicha xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1)$$

o‘rinlidir. Buni isbotlash uchun $\rho(M_0; M) = t$ deb olsak,

$$x - x_0 = t \cos \alpha, \quad y - y_0 = t \cos \beta, \quad z - z_0 = t \cos \gamma$$

bo'ladi, ya'ni $\vec{l}$ yo'nalishga ega bo'lgan M0M kesma nuqtalari uchun

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma$$

parametrik tenglamalarni olamiz va ularni $f(M)$ funksiyaga qo'yib, t ning $\varphi(t)$ murakkab funksiyasiga ega bo'lamiz. Boshlang'ich M0 nuqta $t=0$ ga mos kelishi ayondir. Shunday qilib, $\varphi'(0)$ hosila mavjud bo'lsa,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0; M)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) \quad (2)$$

bajariladi. $\varphi'(0)$ hosila $f(M)$ ga qo'yilgan talab asosida mavjud bo'lib, to'la hosila formulasiga ko'ra

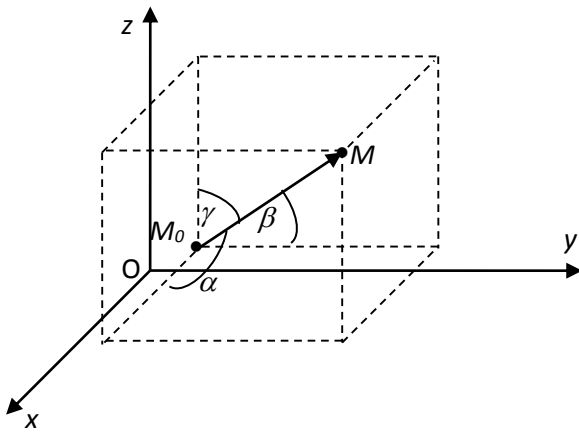
$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

Oxirgida $t=0$ deb, (2) dan (1) ni olish qiyin emas.

Endi yo'nalish bo'yicha hosila funksiyaning shu berilgan yo'nalish bo'yicha «o'zgarish tezligi» ekanligini e'tiborga olgan holda berilgan nuqtada funksiya qaysi yo'nalish bo'yicha eng tez o'sadi, degan savolni qo'yaylik. Bu savol qaralayotgan nuqtada funksiyaning barcha xususiy hosilalari nolga teng bo'lgan hol uchun o'z ma'nosini yo'qotadi. Chunki bunday nuqtada istalgan yo'nalish bo'yicha hosilalar nolga tengdir. Demak, xususiy hosilalardan aqalli bittasi noldan farqli bo'lgan holni qarash lozim bo'ladi.

$$\frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial z} = c$$

belgilashlarini kiritsak, $|a| + |b| + |c| > 0$ shart bajarilishini talab qilamiz.



1-rasm.

$\vec{N}(a;b;c)$ vektorni kiritaylik. Agar $\vec{l}$ yoʻnalishni birlik vektor deb qabul qilsak, u holda (1) ni

$$\frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial l} = \vec{N} \cdot \vec{l}$$

koʻrinishda yozish mumkinligi va skalyar koʻpaytma xossasiga asosan oxirgidan

$$\frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial l} = \Pi p_i \vec{N} \quad (3)$$

oʻrinli ekanligini olamiz. (3) dan agar $\vec{l} \uparrow \vec{N}$ boʻlsa, uning oʻng tomonidagi proeksiya eng katta qiymatga erishishi kelib chiqadi. Demak, funksiyaning $\vec{N}(a;b;c)$ yoʻnalish boʻyicha hosilasi eng kata boʻlib, bu yoʻnalish boʻyicha funksiya eng tez oʻsib borar ekan. Kiritilgan $\vec{N}(a;b;c)$ vektorni funksiyaning qaralayotgan nuqtadagi gradienti deb qabul qilinadi.

Funksiyaning berilgan nuqtadagi gradienti deb, koordinatalari shu nuqtadagi funksiyaning mos xususiy hosilalaridan iborat vektorga aytiladi va $\text{grad } f(x_0; y_0; z_0)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\text{grad } f(x_0; y_0; z_0) = \vec{N} \left(\frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(x_0; y_0; z_0)}{\partial z} \right)$$

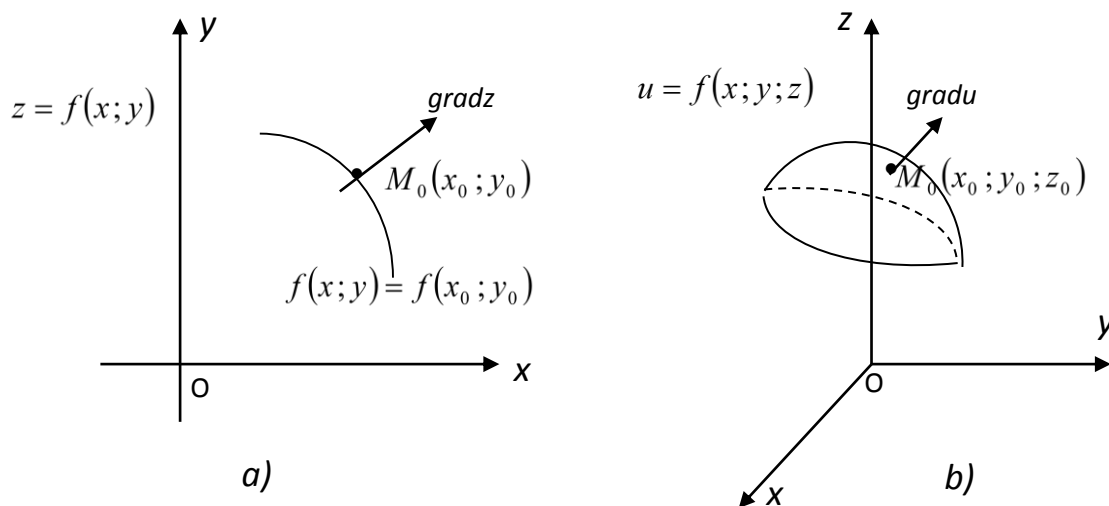
boʻlib, bu vektor berilgan nuqtada funksiyaning eng tez oʻsish yoʻnalishidan iboratdir. Bu oʻrinda funksiya gradientiga qarama-qarshi yoʻnalish boʻyicha hosila uning eng tez kamayish yoʻnalishi boʻlishini ham aytamiz.

Funksiya gradientini koordinalar o'qlarining ortlari bo'yicha

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

ko'rinishda yoziladi.

Uch o'zgaruvchili funksiyaning qaralayotgan M_0 nuqtadagi gradienti (u mavjud va noldan farqli degan faraz asosida) bu funksiyaning M_0 nuqtaga mos satx sirtiga shu nuqtada normal vektordan iborat bo'lishi, ya'ni sirtga tik yo'nalgan bo'lishi isbotlangandir (2b-rasm). Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun uning gradienti satx chizig'iga tikdir (2a-rasm).



2-rasm.

Уринма текислик ва сиртга нормал. Юқори тартибли ҳосилалар. Тейлор формуласи

7.3.1. Сиртга M_0 нуктада ўтказилган уринма текислик деб сиртда M_0 нукта орқали ўтказилган барча эгри чизикларга ўтказилган уринмалар жойлашган текисликка айтилади.

Сиртга M_0 нуктадаги нормал деб M_0 нуктадан ўтувчи ва бу нуктада ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизикка айтилади.

Агар сирт $z=f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада бу сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта орқали сиртга ўтказилган нормалнинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Агар сирт $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан ошқормас кўринишда берилган бўлса, сиртнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасида ўтказилган уринма текислик тенгламаси

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

кўринишда, нормал тенгламаси эса

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

кўринишда бўлади.

1- м и с о л. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ сиртга $M_0(1, 1, 1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг.

Е ч и ш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2.$$

Бу ҳосилаларнинг $M_0(1, 1, 1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = 2 - 2 - 1 = -1 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = -2 + 2 + 2 = 2.$$

Шундай қилиб, $f'_x(1, 1) = -1$, $f'_y(1, 1) = 2$. Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{ёки} \quad x - 2y + z = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

2- м и с о л. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ сиртга $M_0(1, 2, -1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= 3x^2 + yz; & F'_y(x, y, z) &= 3y^2 + xz; \\ F'_z(x, y, z) &= 3z^2 + xy. \end{aligned}$$

Ҳосилаларнинг $M_0(1, 2, -1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} F'_x(1, 2, -1) &= 3 - 2 = 1; & F'_y(1, 2, -1) &= 12 - 1 = 11; \\ F'_z(1, 2, -1) &= 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, уринма текислик тенгламаси:

$$1(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0 \quad \text{ёки} \quad x + 11y + 5z - 18 = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

7.3.2. $z = f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y) .$$

$f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар *аралаш ҳосилалар* дейилади. Аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлган нукталарда уларнинг қийматлари тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шундай аниқланади.

Ушбу $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича ва $(n-m)$ марта y ўзгарувчи бўйича дифференциалланганини билдиради.

12.2.1. Сирт орқали ўтадиган оқимни ҳисоблаш

Агар σ сиртнинг ҳар бир нуктасидаги нормалнинг мусйўналиши

$$\vec{n}^0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

бирлик вектор орқали аниқланган бўлса, у ҳолда $\vec{a}(M) = \{P, Q$ вектор майдоннинг σ сирт орқали ўтувчи Π оқими деб қуйил иккинчи тур сирт интегралига айтилади:

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy ,$$

ёки

$$\Pi = \iint_{\sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma$$

ёки вектор шаклда

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma .$$

1-мисол. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x + 2y + 3z - 6 = 0$ текислигининг биринчи октантда жойлашган юқори қисми бўйича оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Текислигининг нормал бирлик вектори $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}$ бўлади. $\vec{a}$ вектор оқимини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_{\sigma} (x - 4y + 3z) d\sigma.$$

Бу ерда

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), d\sigma = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{3} \iint_D (x - 4y + 6 - x - 2y) dx dy = \frac{1}{3} \iint_D (6 - 6y) dx dy = \\ &= 2 \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (1 - y) dx = 2 \int_0^3 (1 - y)(6 - 2y) dy = 2 \int_0^3 (6 - 8y + 2y^2) dy = \\ &= 4 \int_0^3 (y^2 - 4y + 3) dy = 4 \left(\frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y \right) \Big|_0^3 = \\ &= 4 \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 \right) = 0. \end{aligned}$$

31-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari. : Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning eng kata va eng kichik qiymatlari.

2-o'zgaruvchili funktsiya xususiy va to'la orttirmalari.

1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funktsiyada x o'zgaruvchiga biror orttirma berib, y ni o'zgarishsiz qoldirsak, funktsiya orttirma olib, bu orttirmaga z funktsiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funktsiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2-ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'liq orttirma oladi.

2-o'zgaruvchili funktsiya xususiy hosilalari.

3-ta'rif a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$

funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funktsiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalagan chekli sondagi o'zgaruvchilar funktsiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiy hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

endi x ni o'zgarmas deb z'_y ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

Misol. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

To'la differensial. Ma'lumki, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning dx va dy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning to'la differensial deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to'la differensial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$, qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (2)$$

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to'la differensial

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Misol. $z = \ln(x^2 + y^2)$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

(1) formulaga asosan, bo'ladi.

Misol. $u = x^2 y z^2$ funksiyaning to'la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 y z^2)'_x = y z^2 (x^2)'_x = 2x y z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 y z^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 y z^2)'_z = y x^2 (z^2)'_z = 2x^2 y z.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 y z dz$ bo'ladi.

Misol. O'lchovlari $a=8\text{m}$ $b=6\text{m}$ $c=3\text{m}$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o'zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $V = xyz$ x, y, z uning o'lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

$$\Delta V \approx dV = 6 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0.15) = -4.2$$

Shunday qilib, hajm taxminan 4.2 m^3 ga kamayadi.

Misol. To'la differensial formulasidan foydalanib:

$$1) \arccotg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), \quad 2) \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To'la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va

xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

1) $\arccotg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$ ifoda $f(x, y) = \arccotg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ funksiyaning $P_1(1.97; 1.02)$ nuqtadagi qiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0 = (2; 1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$, $\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo'ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymi

$$f'_x(x, y) = \left[\arccotg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = - \frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[\arccotg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = - \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x^2 - y^2))}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_x(2; 1) = - \frac{1}{1 + (2 - 1)^2} = -0.5; \quad f'_y(2; 1) = \frac{2}{1 + (2 - 1)^2} = 1.$$

(2) dan foydalansak,

$$\arccotg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right) \approx \arccotg\left(\frac{2}{1} - 1\right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$$

bo'ladi.

2) $\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$ ni $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04; 1.99; 1.02)$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1; 2; 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1; 2; 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot (-0,01) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,05$$

natijani olamiz.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.

$z = f(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$ va $f_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n-m)$ marta y o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.

Misol. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{dy \partial x} = (12x^2 y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{dy^2} = (12x^2 y^2 + 7x)'_y = 24x^2 y$$

Ikkinchi tartibli to'la differensial $d(dz) = d^2 z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

Misol. $z = x^2 y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$z'_x = (x^2 y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2 y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

4-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

5-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_1(x_1, y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1; y_1) < f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_1(x_1, y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmisligi ham mumkin.

Ekstremumning yetarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

bilan belgilaymiz va ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1) $A < 0$ bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga, 2) $A > 0$ bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

3. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

Misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{1+x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}.$$

Demak, uchta $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

$O(0,0)$ nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A = -4, B = 4, C = -4$; $\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 16 = 0$ bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan OX o'qi bo'yicha ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$, bissektisa bo'yicha

$$f(x, y)|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, $O(0,0)$ biror atrofida $\Delta f(x, y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ demak $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min} = -8$;

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun $A = 20$, $B = 4$, $C = 20$ bo'lib $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min} = -8$

Misol. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

Yechish:

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funksiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1) = 0$;

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yoki sohada yotuvchi kritik nuqtada, yoki bu soha chegarasida erishadi.

Misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo'lib, $P_0(-1, -1)$ kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Funksiyaning soha chegarasida tekshiramiz: AO chegarada $y = 0$ bo'lib, $z = x^2 + x$ funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning ekstremumi:

$$z'_x = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} = -0,5$$

bo'ladi.

Demak, $P_1(-0,5, 0)$ AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya hosil bo'lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ $y = -1/2$.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo'lib $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} z_0 &= f(P_0) = f(-1, -1) = -1; \\ z_1 &= f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4}; \\ z_2 &= f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \\ z_3 &= f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}; \\ z_4 &= f(0) = f(0, 0) = 0; \\ z_5 &= f(A) = f(-3, 0) = 6; \\ z_6 &= f(B) = f(0, -3) = 6. \end{aligned}$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelimiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiylarning xususiy hosilalarini toping: 1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

2) $z = \frac{xy}{x-y}$; 3) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiylarning to'la differensiallarini toping:

1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $u = x^{y^2z}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$; 5) $s = x \ln t$.

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ bo'lganda dz va Δz larni hisoblang.

Quyidagi funksiyalarning ekstremumini tekshiring.

4. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

5. $z = xy(12 - x - y)$.

6. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.

7. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.

32-mavzu. Oddiy differensial tenglamalar. Koshi masalasi. o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differentsiallari orasidagi munosabatga differensial tenglama deyiladi.

Noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamaga oddiy differensial tenglama deyiladi.

Noma'lum funksiya ikki yoki undan ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamalarga, xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo'ladi.

Umumiy holda n -tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda belgilanadi.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differentsiallanuvchi $y = y(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga integral chiziq deyiladi.

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = x^2$$

Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalari o'rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo'ladigan umumiy usullar yo'q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

Birinchi tartibli tenglamalar. Birinchi tartibli tenglama umumiy holda

$$F(x,y,y') = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. (1) tenglamani y' ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

bo'ladi. (2) tenglamaning o'ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo'lsa, tenglama

$$y' = f(x) \quad (3)$$

ko'rinishida bo'lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko'rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini

topishdan iborat bo'ladi, ya'ni $y = F(x) + C$, $[F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

4-ta'rif. $Y=(x,C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o'zgarmas bo'lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning umumiy yechimi deyiladi.

5-ta'rif. C ixtiyoriy o'zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga xususiy yechim deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko'pincha qo'shimcha

$$y(x_0) = y_0$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0 , y_0 lar berilgan sonlar bo'lib, bu shartga boshlang'ich shart deb ataladi.

6-ta'rif. $Y = f(x,y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga Koshi masalasi deyiladi.

Misol. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish: Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x + C$$

Endi boshlang'ich shartdan foydalanib, $5 \operatorname{tg} 0 + C = 3$, bundan $C = 3$ kelib chiqadi.

Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5 \operatorname{tg} x + 3$ bo'ladi.

O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

7-ta'rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya'ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo'ladi.

Misol. $x dx + y dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int x dx + \int y dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ yoki } x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo'ladi.

8-ta'rif. $y' = f_1(x)f_2(y)$ yoki $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$ ko'rinishdagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo'lib, dx ga ko'paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

Misol. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarini ajratib $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. $F(x,y)$ funksiya uchun $f(kx, ky) = k^a f(x, y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya a - tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda a biror son. Masalan, $f(x, y) = xy - y^2$ funksiya uchun

$$f(kx, ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2) \text{ bo'lib, } f(x, y) = xy - y^2 \text{ funksiya } a$$

$= 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi. buni tekshirib ko'ring).

9-ta'rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya no'linchi tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday differensial tenglamaga birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan $xv' = f(1, v) - v$

differensial tenglamaga keltiriladi.

Misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

bo'lib, $v + xv' = v + v^2$ yoki $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

bo'ladi. Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo'lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo'lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1) (1+y)dy - (1-x)dx = 0; \quad 2) (xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy;$$

$$3) x^2dy + (y-1)dx = 0; \quad 4) 2(xy+y)dx = xdy.$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

$$1) x^2dx + ydy = 0, \quad x=0 \text{ da } y=1;$$

$$2) (1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=-1;$$

$$3) (1+x)ydx = (y-1)x dy, \quad x=1 \text{ da } y=1.$$

33-mavzu. Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va To'la differensial tenglamalar

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $P(x)$ va $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \quad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x) = x$, $g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int x dx} \left[C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{x^2}{2}} + C). \end{aligned}$$

umumiy yechim bo‘ladi.

Bernulli tenglamasi. Bunday differensial tenglama

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamada $n=0$ yoki $n=1$ bo‘lsa, chiziqli tenglama hosil bo‘ladi.

Demak $n \neq 0,1$ bo‘lgan, o‘zgarmas. Bernulli tenglamasini y^n ga bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \quad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

almashtirish bajarsak,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \text{ yoki } z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo'ladi.

Misol. $y' + xy = xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo'lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x \frac{1}{y^2} = x$$

$$\frac{1}{y^2} = z$$

$$z' = \frac{2y'}{y^3}$$

tenglamani hosil qilamiz. almashtirish olsak bo'ladi. Bularni tenglamaga qo'yib,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish mumkin:

$$z = e^{2\int x dx} \left[C + \int (-2x)e^{-2\int x dx} dx \right] = e^{x^2} \left[C - \int 2xe^{-x^2} dx \right] =$$

$$e^{x^2} \left[C + \int e^{-x^2} d(-x^2) \right] = e^{x^2} \left[C + e^{-x^2} \right] = Ce^{x^2} + 1.$$

Shunday qilib

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

bo'ladi, z ning o'rniga $\frac{1}{y^2}$ ni qo'yib,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1},$$

yechimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

$$1) \quad y' - \frac{y}{x} = -1; \quad 2) \quad y' + y = e^{-x}; \quad 3) \quad x^2 y' - 2xy = 3; \quad 4) \quad y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2;$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

$$1) \quad xy' + y = 3, \quad x = 1 \text{ da } y = 1; \quad 2) \quad (1+x^2)y' - xy = 2x, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0;$$

$$3) \quad xy' + y = x + 1, \quad x = 2 \text{ bo'lganda } y = 3.$$

34-mavzu. To'la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko'paytuvchi.

To'la differensialli tenglama.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensial, ya'ni

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

bo'lsa, bunday tenglama to'la differensialli tenglama deyiladi. (3) tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To'la differensialli tenglama ta'rifidan $du = 0$ bo'lib, bundan $u(x, y) = C$ kelib chiqadi (C ixtiyoriy o'zgarmas). $u(x, y)$ funksiyaning topish uchun y ni o'zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanligidan $du = M(x, y)dx$ bo'ladi. Oxirgi tenglikni x bo'yicha integrallasak,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni y bo'yicha differensiallaymiz va natijani

$$N(x, y) \text{ ga tenglaymiz, chunki } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \text{ edi.}$$

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni y bo'yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Shunday qilib,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Misol. Ushbu

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to'la differensialli bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}, N = \frac{2y}{x^3}$$

bo'lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6y}{x^4}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6y}{x^4}$$

bo'lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'ladi, ya'ni berilgan differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensial bo'ladi. Endi $u(x, y)$ funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}$$

bo'lganligi uchun

$$u = \int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \varphi(y) = \int (x^{-2} - 3y^2 x^{-4}) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + \varphi(y) \quad (4)$$

bo'lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma'lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni y bo'yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y) = 0$ bo'lib,

$$\varphi(y) = C_1.$$

bo'ladi. (4) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1\right) = 0$$

bo'lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo'lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo'ladi, bunda $C = C_2 - C_1$.

Integrallovchi ko'paytuvchi.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

differentensial tenglamaning o'ng tomoni biror funksiyaning to'la differensial bo'lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o'ng tomoni biror funksiyaning to'la differensial bo'lmasin. Ayrim hollarda shunday $\mu(x, y)$ funksiyaning tanlab olish mumkin bo'ladiki, berilgan tenglamani shu funksiya ko'paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to'la differensial bo'lishi mumkin. Hosil qilingan differensial tenglamaning umumiy yechimi bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo'ladi. Bunday $\mu(x, y)$ funksiya ko'paytirilganda berilgan tenglamaning integrallavchi ko'paytuvchisi deyiladi. Integrallovchi ko'paytuvchini topish uchun, berilgan tenglamani hozircha noma'lum bo'lgan μ ga ko'paytirib,

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to'la differensial bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bundan

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

bo'lib,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglamani μ ga bo'lak,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial y}$$

bo'lganligi uchun

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

bo'ladi.

Umumiy holda $\mu_{x,y}$ larga bog'liq, ya'ni $\mu(x,y)$. Berilgan tenglama faqat

x ga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ bo'lib,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{yoki} \quad \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (4)$$

bo'ladi. Differensial tenglama faqat y o'zgaruvchiga bog'liq integrallovchi

$$\text{ko'paytuvchiga ega bo'lsa, } \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0 \text{ bo'lib,}$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad (5)$$

bo'ladi. Bu hollarda (4) va (5) tengliklarni bevosita integrallab

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N dx}, \quad \mu = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M dy}$$

integrallovchi ko'paytuvchini topamiz. Bunda (4) va (5) nisbatlar, birinchi holda y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan, ikkinchi holda x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan integrallovchi ko'paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

Misol.

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to'la differensialli yoki to'la differensialli

emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x^2 - 3y^2)'_y = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demak, tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

bo'lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

hosil bo'ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$ funksiyaga ko'paytirsak,

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2xy}{x^4} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'lib, keyingi tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya'ni oxirgi differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o'rgandik.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

$$1) y' - \frac{y}{x} = -1; \quad 2) y' + y = e^{-x}; \quad 3) x^2 y' - 2xy = 3; \quad 4) y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2;$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

$$1) xy' + y = 3, \quad x = 1 \text{ da } y = 1; \quad 2) (1+x^2)y' - xy = 2x, \quad x = 0 \text{ bo'lganda } y = 0;$$

$$3) xy' + y = x + 1, \quad x = 2 \text{ bo'lganda } y = 3.$$

3. Ushbu to'la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

$$1) (x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = 0; \quad 2) (y - 3x^2) dx - (4y - x) dy = 0;$$

5. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko'paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

$$1) (x^2 - y) dx + x dy = 0; \quad 2) (y + xy^2) dx - x dy = 0;$$

35-mavzu. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar.

$y(n) = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar

$y(n) = f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglama ketma-ket n marta integrallash bilan uning yechimi topiladi. Har bir integrallashda bittadan ixtiyoriy o'zgarmas hosil bo'lib, natijada n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq umumiy yechim hosil bo'ladi.

Misol. $y'' = \cos 2x$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 0$, $y' = 0$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(x)$ desak, $y'' = p'$ bo'lib, berilgan tenglama

$$p' = \cos 2x \text{ yoki } \frac{dp}{dx} = \cos 2x, \quad dp = \cos 2x dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi tenglamani integralab,

$$p = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

tenglamani hosil qilamiz.

$p = y'$ bo'lganligi uchun

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

ya'ni,

$$dy = \frac{1}{2} \sin 2x dx + C_1 dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + \int C_1 dx, \quad y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x$$

umumiy yechimni olamiz.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarda Koshi masalasini yechamiz: $x = 0$ bo'lganda $y = 0$, $y' = 0$ bo'lganligi uchun,

$$-\frac{1}{4} \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin 0 + C_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi

$$y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}$$

bo'ladi.

$F(x, y', y'')$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar

Bu tenglamani $y' = p$ $y'' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish orqali $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

Misol. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelimiz. Bu tenglamani yechib:

$$P = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right] = e^{\ln x} \left[C_1 + \int x e^{-\ln x} dx \right] = x(C_1 + \int x e^{-\ln x} dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

Yuqori tartibli tenglamalarni ba'zi hollarda tartibini pasaytirish mumkin. Hozir shunday tenglamalarning bir necha tiplarini ko'rib o'tamiz.

1. Ushbu

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k \leq n) \quad (1)$$

(1) tenglamada $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ tartibli Hosilalar qatnashmaydi. Bu holda $y^{(k)} = z$ ko'rinishda yangi z funksiya kiritamiz, unda (1) tenglama

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga kelib, tartibi $(n-k)$ ga teng. Biror usul bilan (2) tenglamani yechib, umumiy yechimini topamiz.

$$z = w(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

almashtirishga ko'ra

$$y^{(k)} = w(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

ko'rinishga keladi. So'ngi tenglamani integrallab,

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ko'rinishdagi umumiy yechimini olamiz.

$$\text{MISOL: } 4y' + y''^2 = 4xy''$$

Unda $y' = z$ deb olsak,

$$4z + z'^2 = 4xz' \quad \text{yoki} \quad z = xz' - \frac{z'^2}{4} \quad \text{Klero tenglamasiga keladi.}$$

Klero tenglamasining yechimi

$$z = cx - \frac{c^2}{4} \quad \text{bo'lib, undan}$$

$$y' = cx - \frac{c^2}{4} \quad \text{tenglamaga kelamiz.}$$

Integrallab, quyidagi

$$y = c_1 x(x - c_1) + c_2 \quad \left(c_1 = \frac{c}{2} \right)$$

ko'rinishdagi umumiy yechimni topamiz.

ESLATMA: Agar (1) tenglama

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishida bo'lsa $y^{(n-1)} = z$ almashtirish qilamiz. Agar

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda bo'lsa $y^{(n-2)} = z$ almashtirish kiritib

$$z'' = f(z)$$

ko'rinishdagi tenglamaga keltiriladi.

Agar n-tartibli tenglamani $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, uni integrallash oson amalga oshiriladi. Bunda $f(x)$ (a, b) intervalda uzluksiz funksiya. Bu tenglamani integrallashda $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ tenglikdan ketma-ket foydalanib, integrallaymiz, ya'ni

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(t) dt + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(t) dt dt + c_1(x - x_0) + c_2$$

shu jarayonni n-marta takrorlab umumiy yechimni hosil qilamiz.

2. (1) tenglamada erkli o'zgaruvchi qatnashmasa, ya'ni

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

bo'lsa, u holda $y' = z$ ko'rinishda yangi o'zgaruvchi kiritamiz va uni erkli o'zgaruvchi sifatida olamiz hamda ketma-ket hosila hisoblamiz:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} z \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} z \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} \right)^2$$

$$y^{(n)} = w \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right)$$

Bu hosilalarni (3) tenglamaga qo'yib,

$$F \left(y, z, \frac{dz}{dy} z, \dots, w \left(\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right) \right) = 0$$

n-1 tartibli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topsak,

$$z = \varphi(y, c, c_1, \dots, c_{n-1})$$

ko'rinishida ifodalanadi. Bundan esa

$$y' = \varphi(y, c, c_1, \dots, c_{n-1})$$

tenglamaga kelamiz. So'nggi tenglamani integrallab, (3) tenglamani umumiy yechimi topiladi.

3. (1) tenglamada F funksiya $y, y', \dots, y^{(n)}$ o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli bo'lsin, ya'ni bir jinsli tenglamalar mavzusida berilgan ta'rifga ko'ra ixtiyoriy t uchun

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Bunday tenglamalar uchun

$$\frac{y'}{y} = z$$

almashtirish qilamiz, unda

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + z'y = (yz)z + y'z = y(z^2 - z')$$

$$y''' = y(z^3 - 3zz' + z''), \dots, y^{(n)} = yw(z, z', K, z^{(n-1)})$$

bo'lib, (1) tenglama

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, yw(z, z', K, z^{n-1})) = 0$$

bu bir jinsli ekanligini nazarda tutsak,

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, w(z, z', K, z^{n-1})) = 0$$

Bu tenglamani y ga bo'lib yuborsak, $n-1$ tartibli tenglamaga kelamiz. Uni yechib,

$$z = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

echimga ega bo'lamiz, yoki almashtirishga ko'ra

$$y' = y\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

tenglamani yechamiz, buni umumiy yechimi

$$y = c_n e^{\int \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx}$$

ko'rinishda bo'lib, (1) tenglamaning bir jinsli bo'lgan holdagi umumiy yechimini ifodalaydi.

Faraz qilaylik tenglama

$$P(x, y^{(n)}) + Q(x, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda bo'lib, P va Q funksiyalar mos holda k va m tartibli bir jinsli funksiyalar bo'lsin. U holda

$$y^{(n)} = tx \quad (5)$$

almashtirish qilib, (4) ni x ga nisbatan yechamiz va x ni o'rniga

$x = \varphi(t)$ parametr kiritamiz, uni (5) ga qo'yib,

$$y^{(n)} = t\varphi(t)$$

ko'rinishni hosil qilamiz.

Shunday qilib,

$$x = \varphi(t)$$

$$y^{(n)} = t\varphi(t)$$

parametrik ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dy$ tenglikdan foydalanib ketma-ket integrallaymiz.

ESLATMA: F funksiya bir jinsli bo'lgan holda

$$y = e^{\int z dz}$$

almashtirish kiritish ham tenglama tartibini kamaytirishiga olib keladi.

MISOL: $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$ tenglamani yeching.

Tekshiramiz: $ty - ty'' - (ty')^2 = 6xt^2y^2$,

bundan $t^2(yy'' - (y')^2) = 6xy^2$ demak, berilgan tenglama y, y', y'' ni nisbatan bir jinsli ekan. Endi

$$y = e^{\int z dz}$$

belgilash kiritamiz: $y' = ze^{\int z dz}$

$y'' = e^{\int z dz} (z^2 + z')$ Hosila lar bilan birga tenglamaga qo'yamiz.

$$e^{\int z dz} e^{\int z dz} (z^2 + z') - z^2 e^{2\int z dz} = 6x e^{2\int z dz}$$

yoki $z^2 + z' - z^2 = 6x$ bo'ladi. $z' = 6x$ tenglamani yechib, $z = 3x^2 + c$ topamiz.

Almashtirishi ko'ra

$y = e^{\int (3x^2 + c) dx} = c_2 e^{x^3 + cx}$ umumiy yechim hosil bo'ladi.

36-mavzu. Yuqori tartibli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar.

$F(y, y', y'') = 0$ (erkli o'zgaruvchi oshkor qatnashmagan) bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini $y' = z(y)$ almashtirish olib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib yechim topiladi.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y).$$

bo'ladi.

Misol. $yy'' - 2y'^2 = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = z(y)$ almashtirish olib, $y'' = z \frac{dz}{dy}$ ekanligini hisobga olsak,

$$yz \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli o'zgaruvchilari differensial tenglama:

$$\frac{ydz}{dy} = 2z \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{z} = 2 \frac{dy}{y},$$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln z = 2 \ln y + \ln C_1$$

bundan

$$z = C_1 y^2$$

bo'ladi. $z = \frac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad \text{yoki} \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

bo'ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko'p masalalarini yechish ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga keltiriladi.

Differensial tenglamada noma'lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \quad (1)$$

bu yerda y noma'lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a, b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo'lsa, (1) tenglamaga bir jinsli chiziqli differensial tenglama deyiladi. $f(x) \neq 0$ bo'lsa bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a, b]$ kesmada berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Shunday α_1, α_2 o'zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hech bo'lmaganda bittasi no'ldan farqli bo'lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad (2)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga chiziqli bog'langan funksiyalar deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog'langan bo'lsa, ular proporsional bo'ladi, ya'ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo'lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \quad \text{yoki} \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const}$$

bo'ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ va $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog'langan,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4.$$

chunki

2-ta'rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga chiziqli bog'lanmagan funksiyalar deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog'langan bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'lga teng bo'ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli bo'lsa ular chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

Ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko'p masalalari (1) tenglamada $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar o'zgaras sonlar bo'lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o'zgaras koeffitsientlar bo'lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lib p, g lar o'zgaras koeffitsientlar. Bunday ko'rinishdagi tenglamaga ikkinchi tartibli, o'zgaras koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama deyiladi. (3) ko'rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog'lanmagan yechimlari bo'lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy o'zgaraslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo'yib ko'rsatish mumkin (buni bajarib ko'ring).

Misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo'yish bilan tekshirib ko'rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan yechimlar bo'ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x e^{-x} \\ e^x - e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko'rinishda izlaymiz, bu yerda r noma'lum son. $y = e^{rx}$, $y' = r e^{rx}$ bo'lib, (3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + g e^{rx} = 0 \text{ yoki } r^2 + pr + g = 0, (e^{rx} \neq 0) \quad (5)$$

bo'ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$, funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad \text{va} \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo'lib, bunda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

- 1) r_1 va r_2 lar haqiqiy va har xil, ya'ni $r_1 \neq r_2$;
- 2) r_1 va r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya'ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;
- 3) r_1 va r_2 kompleks sonlar, ya'ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimlar bo'lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (6)$$

bo'ladi.

Misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

bo'lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ va $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ ko'rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = x e^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x} (1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x} (r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo'yib

$$x(r_1^2 + p r_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun oxirgi

tenglikdagi birinchi qavs aynan no'lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo'lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no'lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, hamda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog'lanmagan (tekshirib ko'ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad (7)$$

umumiy yechim bo'ladi.

Misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo'lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo'ladi (tenglamani yechib ko'rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma:

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ bo'lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

ko'rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{va} \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i$, $r_2 = -3 - 2i$ bo'ladi. Bu ildizlar kompleks qo'shma bo'lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya'ni Koshi masalasini qaraymiz.

Misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo'lib, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ uning ildizlari bo'ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo'lib, $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ boshlang'ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda $y = 2$, $y' = 1$, $y'' = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 4) $y'' y^3 = 1$;

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 6) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$; 7) $y'' + 2y'^2 = 0$;

8) $xy'' - y' \operatorname{tg} x = e^x x^2$; 9) $2yy'' = (y^1)^2$; 10) $t \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

- 1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 5y = 0$; 3) $y'' - y = 0$;
 4) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$; 6) $y'' - 2y' + 50y = 0$;
 7) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 8) $y'' + 6y' = 0$.

37-mavzu. Yuqori tartibli o'zgaras koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar.

Ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda p, g o'zgaras koeffitsientlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo'lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu fikrga (2) yechimni (1) tenglamaga qo'yib ko'rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko'ring).

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}(x)$ ni topishni yuqorida o'rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo'ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, bu yerda $P_n(x)$ n - darajali ko'p had;

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$

ko'rinishda bo'lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda k xarakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo'lganlari soni (0,1,2 bo'lishi mumkin), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsientli ko'phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo'lib, uning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo'ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \quad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo'lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo'ladi.

Endi berilgan birjinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz:

Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko'phad darajasi bilan bir xil ko'phad, lekin aniqmas koeffitsientli ko'phad ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko'rinishda bo'ladi. Endi aniqmas A, B va C koeffitsientlarni topish lozim.

Shartga ko'ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$y_1''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$e^{2x}[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo'lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo'ladi.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo'lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsientlari o'zaro teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Uchta noma'lum koeffitsientlarga nisbatan uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak $A = 5, B = -12, C = 3$ bo'ladi (buni bajarib ko'ring).

Demak, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga aniqmas koeffitsientlar usuli deyiladi.

Misol. $y'' - 4y' = 3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $r^2 - 4r = 0$ bo'lib, $r_1 = 0$; $r_2 = 4$ uning ildizlari bo'ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo'lib, $\alpha = 0$ va no'l xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1'' = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo'ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo'lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo'ladi.

2) $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ bo'lganda xususiy yechim

$y_1(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^k$ ko'rinishda bo'lib, k xarakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo'lganlarining soni.

Misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: Xarakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo'lib, ildizlari $r_{1,2} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$

bo'ladi.

$$\beta = 1; \quad i\beta = i$$

bo'lganligi uchun $k=1$, ya'ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A \cos x + B \sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsientlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topib,

$$y_1'(x) = (A \cos x + B \sin x)x + A \cos x + B \sin x = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x$$

$$y_1''(x) = B \cos x - A \sin x - Bx \sin x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x = (2B - Ax) \cos x + (-2A - Bx) \sin x$$

berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(2B - Ax) \cos x + (2A - Bx) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x \quad \text{yoki}$$

$$2B \cos x + (-2A) \sin x = \sin x$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0, A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2} \cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

bo‘ladi.

Misol. $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$

differentensial tenglamaning

$y(0) = 1, y'(0) = 2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \quad \text{tenglamaning xarakteristik tenglamasi } r^2 + 4r + 5 = 0 \quad \text{bo‘lib,}$$

uning ildizlari $r_1 = -2 - i; r_2 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A \cos x + B \sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y_1'(x), y_1''(x)$ hosilalarni topib berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsientlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2. \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8}, B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

bo'ladi.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya'ni boshlang'ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechiminitopamiz:

$$y'(x) = -2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{8} \cos x$$

bo'ladi, boshlang'ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 va C_2 noma'lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan

$$C_1 = \frac{5}{8}, \quad C_2 = \frac{25}{8}$$

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x} \left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x \right) + \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

2-ta'rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga chiziqli bog'lanmagan funksiyalar deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda chiziqli bog'langan bo'lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'lga teng bo'ladi. Bu funksiyalar uchun (a, b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli bo'lsa ular chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

Misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo'yish bilan tekshirib ko'rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan yechimlar bo'ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\left| \frac{e^x e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right| = e^x (-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko'rinishda izlaymiz, bu yerda r noma'lum son. $y = e^{rx}$, $y' = r e^{rx}$ bo'lib, (3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + q e^{rx} = 0 \text{ yoki } r^2 + p r + q = 0, (e^{rx} \neq 0) \quad (5)$$

bo'ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$, funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{va} \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bo'lib, bunda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

- 1) r_1 va r_2 lar haqiqiy va har xil, ya'ni $r_1 \neq r_2$;
- 2) r_1 va r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya'ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;
- 3) r_1 va r_2 kompleks sonlar, ya'ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog'lanmagan xususiy yechimlar bo'lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad (6)$$

bo'ladi.

Misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \quad r_2 = 3$$

bo'lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo'ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ va $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo'ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ ko'rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = x e^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x} (1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x} (r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo'yib

$$x(r_1^2 + pr_1 + q) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun oxirgi

tenglikdagi birinchi qavs aynan no'lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo'lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no'lga teng.

Demak, $y_2(x) = x e^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi, hamda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog'lanmagan (tekshirib ko'ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \quad (7)$$

umumiy yechim bo'ladi.

Misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo'lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo'ladi (tenglamani yechib ko'rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o'zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma:

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ bo'lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

ko'rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

tengliklar hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{va} \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no'ldan farqli (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i$, $r_2 = -3 - 2i$ bo'ladi. Bu ildizlar kompleks qo'shma bo'lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3$, $\beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya'ni Koshi masalasini qaraymiz.

Misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o'zgaras koeffitsientli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo'lib, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ uning ildizlari bo'ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo'lib, $x = 0$ bo'lganda $y = 8$, $y' = 7$ boshlang'ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3$, $C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo'radi.

bo'radi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglama uchun $x = 0$ bo'lganda $y = 1$, $y' = \frac{7}{8}$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarda, Koshi masalasini yeching.

38-mavzu. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalarning tabiiy mexanik jarayonlarni matematik modellarini tuzishdagi ahamiyati.

TA'RIF. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb, tenglamada qatnashayotgan noma'lum funksiyalar va ularning hosilalari birinchi darajada bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Chiziqli differensial tenglamalar sistema (ch.d.t.s.) ning kanonik ko'rinishi

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (1^*) \quad (i = \overline{1, n})$$

dan iborat.

Bunda $P_{ij}(x)$, $f_i(x)$ lar ko'rilyotgan oraliqda x -ning uzluksiz funksiyalaridir.

(1*) sistemani vektorli ravishda

$$\frac{dy}{dx} = A(x)Y + f(x) \quad (2^*)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $A(x)$ matrisa funksiya, $f(x)$ vektor-funksiya.

$$A(x) = \begin{pmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) & \dots & P_{1n}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) & \dots & P_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(x) & P_{n2}(x) & \dots & P_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = colon(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

$f(x)$ koordinatalari, $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ bo'lgan vektor-funksiya.

Agar (1^*) sistemada, ko'rilayotgan oraliqdagi x ning hamma qiymatlari uchun $f_i(x) \neq 0$ bo'lsa, (1^*) sistemaga birjinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Agar $f_i(x) = 0$ bo'lsa,

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

ga, birjinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

Bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

Quyidagi teoremlarni osonlik bilan isbotlash mumkin.

TEOREMA 1. Agar $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ lar (1) sistemaning yechimlari bo'lsa, u xolda $cy_{11}, cy_{12}, \dots, cy_{1n}$ ($c = const$) lar xam (1) sistemaning yechimlari bo'ladi.

TEOREMA 2. Agar $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ va $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$ lar (1) sistemaning yechimlari bo'lsa, u xolda $y_{11} + y_{21}, y_{12} + y_{22}, \dots, y_{1n} + y_{2n}$ lar xam (1) sistemaning yechimlari bo'ladi.

Faraz etaylik (1) sistemaning xususiy yechimlari

$$\begin{array}{cccc} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{array} \quad (2)$$

bo'lsin.

Agar bu xususiy yechimlardan tuzilgan

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

determinant nolga teng bo'lmasa, (2) yechimlar sistemasiga, (1) sistemaning fundamental yechimlar sistemasi (fes) deyiladi.

TEOREMA 3. Agar berilgan differensial tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari ko'rilayotgan oraliqda uzluksiz bo'lsalar, bu xolda sistemaning bu oraliqda aniqlangan fundamental yechimlar sistemasi mavjuddir.

ISBOT. b_{ik} ($i, k = \overline{1, n}$) sonlaridann2 tasini shunday tanlab olamizki, ulardan tuzilgan determinant nolga teng bo'lmasin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

(1) sistemaningn2 ta $y_{ik}(x)$ xususiy yechimlarining shunday tanlab olamizkim, ular $x = x_0$ da $y_{ik}(x) = b_{ik}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin. Xususiy yechimlar ko'rilayotgan oraliqda uzluksiz funksiyalardan iborat. (4) ga asosan ulardan tuzilgan determinant nolga teng bo'lmagani uchun, bu xususiy yechimlar (1) sistemasining fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

TEOREMA 4. Agar ko'rilayotgan oraliqning biror x0nuqtasida $W(x_0) \neq 0$ bo'lmasa, u xolda oraliqning xamma nuqtalarida bulmaydi $W(x) \neq 0$.

ISBOT. Teoremani isboti uchun (3) determinantning ustun elementlari bo'yicha hosilani olamiz.

Ma'lumki n-tartibli determinantning hosilasi n-ta n-tartibli determinantlar yig'indisiga teng bo'lib, ularning birinchisida faqat birinchi ustun elementlarining hosilasi olinib, qolgan elementlar uz xoliga qoladi, ikkinchi determinantida ikkinchi ustun elementlarining hosilasi olinib, qolgan elementlar uz xoliga qoladi va xokazo, ya'ni

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y'_{1i} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y'_{2i} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y'_{ni} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

bundagi y'_{ki} lar o'rniga (1) sistemadan

$$\frac{dy_{ki}}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_{kj}$$

qiymatlarni keltirib qo'ysak,

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & P_{ij}(x)y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & P_{ij}(x)y_{2j} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & P_{ij}(x)y_{nj} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

bu oxirgi determinant $i \neq j$ bo'lmaganda u nolga teng bulib, $i=j$ bo'lganda $P_{ii}(x)W(x)$ ga teng bo'ladi.

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx$$

Bundan

buni xar ikkala tomonini $[x_0, x]$ oraliqda integrallasak

$$\ln W(x) \Big|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx$$

yoki

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx} \quad (5)$$

Bundan ko'rinadikim, agar $W(x_0) \neq 0$ bo'lmasa, u xolda $W(x) \neq 0$ bo'lmaydi. (5) ga sistema uchun Ostrogradskiy-Liuvill formulasi deyiladi.

TEOREMA 5. Agar $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn} \quad (k = \overline{1, n})$ (1) sistemaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u xolda (1) sistemaning umumiy yechimi

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_{ki} \quad (6) \quad (i = \overline{1, n})$$

dan iborat.

ISBOT. 1 va 2 teoremalarga asosan (6), (1) sistemaning yechimi bo'ladi. Uning umumiy yechim ekanligini ko'rsatish uchun undagi o'zgarmaslarni -ck shundayaniqlab olish mumkin bo'lsakim $x=x_0$ bo'lganda $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$ (7) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi tenglamaning xamma xususiy yechimlarini aniqlash mumkin bo'lsin $y_i^{(0)}$ ixtiyoriy son.

(7) ni (6) ga olib borib qo'ysak ck ga nisbatan n-ta birjinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz.

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{ki}(x_0) = y_i^{(0)} \quad (8)$$

Bu sistemaning asos determinanti Vronskiy determinantidan iborat bulib, u nolga teng bo'lmaydi. Chunki shartga asosan $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn}$ lar (1) sistemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat.

Shuning uchun (8) sistemadan $c_k = c_k^*$ lar bir qiymatli aniqlanadi c_k^* larning bu qiymatlarini (6) ga olib borib qo'ysak boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (1) sistemaning xamma xususiy yechimlarini aniqlash mumkin.

Misol-1 Agar $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{ki}, \dots, y_{kn}$ fundamental yechimlar sistemasi berilgan bo'lsa, unga mos bo'lgan bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini toping.

Faraz etaylik izlanayotgan tenglama

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (9) \quad \text{bo'lsin.}$$

Bunda $P_{ij}(x)$ lar aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lum funksiyalar.

Fundamental yechimlar sistemasidan i -chisini (9) tenglamaga qo'ysak

$$\frac{dy_{ki}}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_{kj} \quad (10)$$

ayniyatiga ega bo'lamiz. Bu esa $P_{ij}(x)$ larga nisbatan n noma'lumli n ta tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bu sistemaning asos determinanti Vronskiy determinantidan iborat bo'lgani uchun; undan $P_{ij}(x)$ lar bir qiymatli aniqlanadi. Bu topilgan $P_{ij}(x)$ - larni (9) tenglama qo'ysak izlangan tenglamaga ega bo'lamiz.

Buni determinant shaklida xam yozish mumkin

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_{1i}}{dx} & \frac{dy_{2i}}{dx} & - & \frac{dy_{ni}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & - & y_{n1} \\ - & - & - & - & - \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & - & y_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Misol-2 $y_{11}=x+1$ $z_{12}=x$

$y_{21}=2$ $z_{22}=x$

ikki noma'lumli y, z tenglamalarning fundamental yechimlar sistemasi berilgan bo'lsa, tenglamani uzini aniqlash.

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 & 0 \\ y & x+1 & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & 1 & 1 \\ y & x+1 & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0$$

y_{ij} -noma'lum funksiya, i -yechimi

$$x(x+1)\frac{dy}{dx} + 2z + 0 - 0 - 2x\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1} - \frac{2z}{x(x-1)} \\ \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}\right)z = \frac{z}{x} \end{cases}$$

$$x(x+1)\frac{dz}{dx} + 2z + xy - z(x+1) - 2x\frac{dz}{dx} - xy = 0$$

$$[x(x+1) - 2x]\frac{dz}{dx} = [(x+1) - 2]z$$

$$(x^2 - x)\frac{dz}{dx} = (x-1)z \quad x\frac{dz}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1). Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o'sish modeli. Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo'lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo'lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflansin, ya'ni

$$J(t) = mPQ(t) \quad (1)$$

bo'lsin, bunda m investitsiya me'yori bo'lib o'zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizatsiya qilinayotgan bo'lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o'sishi ta'minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o'sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$Q(t) = eJ(t), \quad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me'yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q(t) = emPQ \quad \text{yoki} \quad Q(t) = kQ(t) \quad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad \text{yoki} \quad Q = ce^{kt}$$

bo'ladi, bunda c ixtiyoriy o'zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo'lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad \text{yoki} \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo'ladi. (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \quad (4)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o'sishi modeli eksponensial bo'lar ekan (tabiiy o'sish deganimizda raqobat yo'qligi tushuniladi).

Matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma'lumki bakteriyalarning ko'payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2). Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o'sishi modeli Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizatsiya bo'ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya'ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko'paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo'lib

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo'ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek

$$Q = \alpha P(Q)Q \quad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o'ng tomonidagi ko'paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo'ladi, ya'ni $Q(t)$ o'suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog'lanish chiziqli, ya'ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0$$

bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

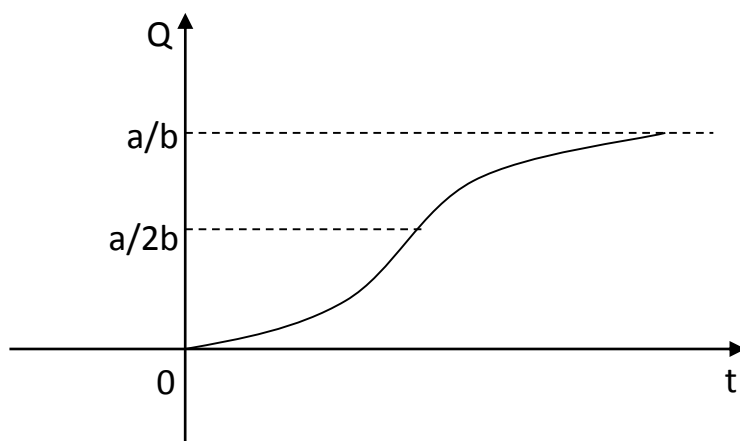
$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \quad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglikni differensiallasak

$$Q'' = (\alpha a Q - \alpha b Q^2)' = \alpha a Q' - 2\alpha b Q Q' \quad \text{yoki} \quad Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0$ va $Q = \frac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0$, $Q < \frac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \frac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi.

Bulardan $\frac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda logistik chiziq deb ataladi.



1-chizma.

3). Talab va taklifni tahlil qilish. Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan xarakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib ushbu bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \quad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi xaridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsienti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o'zgarishi orasidagi bog'lanishni tahlil qilaylik. Ma'lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \quad (2)$$

ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig'indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{p}(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo'ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o'zgarmas, ya'ni qaror topgan narxni olamiz, hamda buni (3) tenglamaga qo'yib $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib (9) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \quad (3)$$

bo'ladi.

Bu yechimdan $t \rightarrow \infty$ da $p(t) \rightarrow 3$ bo'ladi, ya'ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo'lganda, narx $p(0) = 4$ va o'sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo'lsin. $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 4$ bo'lganligi uchun (10) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak $C_2 = 4$ kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t} (\cos t + 4 \sin t)$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

- 1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8 \sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
- 4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;
- 6) $y'' + 6y' + 10y = 9 \cos x + 27 \sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2 \sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglama uchun $x = 0$ bo'lganda $y = 1$, $y' = \frac{7}{8}$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarda, Koshi masalasini yeching.

39-mavzu. Sonli qatorning umumiy hadi. Xususiy yig'indisi, qatorning yaqinlashish va uzoqlashishi. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

Sonli qatorlar haqida tushunchalar

1-ta'rif. sonlar ketma-ketligidan tuzilgan.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa n - hadi yoki umumiy hadi deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qatorga garmonik qator deyiladi;

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Qator yig'indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta'rifidan ma'lumki, uning hadlari cheksiz ko'p bo'lib, yig'indisini oddiy yo'l bilan qo'shib, topib bo'lmaydi. Shuning uchun qatorning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1, \quad u_1 + u_2 = S_2, \quad u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \dots,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S_n$$

qisman yig'indilar tuzamiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

2-ta'rif. chekli limit mavjud bo'lsa, S ga qator yig'indisi deyiladi va qator yaqinlashuvchi deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo'lmasa, qatorning yig'indisi bo'lmaydi va u uzoqlashuvchi deyiladi.

Misol.
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismaniy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S = 1$ bo'ladi.

Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti).

Teorema. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

shart bajariladi.

Isbot. (2) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Shunday qilib, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n \rightarrow \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo'lmasa, u

uzoqlashuvchi bo'ladi. Lekin $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat zaruriy shart bo'lib, yetarli emas.

Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari

1) Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (3)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (4)$$

qatorlar uchun $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, \dots, u_n \leq v_n, \dots$ tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (4) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (3) qator ham yaqinlashuvchi bo'lidi va uning yig'indisi (4) qator yig'indisidan katta bo'lmaydi; (3) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (4) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol. $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma'lumki, keyingi qator maxraji $q = \frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya bo'lib, yaqinlashuvchidir. Hamma n lar uchun

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). Dalamber belgisi. Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

qator berilgan bo'lsin. limit mavjud bo'lib: $d < 1$ bo'lsa,

qator yaqinlashuvchi; $d > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi; $d = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo'ladi.

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Misol.

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Yechish.

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

Misol.

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) Koshi belgisi.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli qator berilgan bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud va $k < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi; $k > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi; $k = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

$$\text{Misol. } \sum_1^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisidan

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo'ladi.

40-mavzu. Qator yaqinlashishining integral alomati. Ishoralari almashinuvchi qatorlar Leybnis teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Qator yaqinlashishining integral belgisi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli qator berilgan bo'lsin.

$f(n) = a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(n)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo'lsin.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(n) dn$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

$$\text{Misol. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

$$\text{Yechish. } f(n) = \frac{1}{n^2} \text{ yoki } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ funksiyaning tuzib, ushbu xosmas}$$

integralni hisoblaymiz:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

$$\text{Misol. } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n}$ yoki $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lganligi uchun

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ishoralari almashinuvchi qatorlar (Leybnis qatori). Ishoralari har xil bo'lgan qatorlarga o'zgaruvchan ishorali qatorlar deyiladi.

O'zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir.

Masalan,
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

qator birinchi hadi musbat bo'lgan ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini Leybnis belgisi bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \quad (5)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ musbat sonlar.

Leybnis belgisi. Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati

bo'yicha kamayuvchi, ya'ni 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

va 2) umumiy hadining $n \rightarrow \infty$ dagi limiti no'lga teng, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ bo'lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (5) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi birinchi haddan katta bo'lmaydi. Bu shartlardan birontasi bajarilmasa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol.
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnis belgisi shartlarini tekshiramiz:

1)
$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots;$$

2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

. Demak, Leybnis belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnis belgisiga asosan, qator yaqinlashuvchi.

Misol. $1,1 - 1,01 + 1,001 - \dots$
qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0,1^n$ bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 \neq 0,$$

Leybnis belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo'llaniladi. Taqribiy hisoblashlarda yo'l qo'yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo'lmaydi, ya'ni

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

Misol..
$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

ni 0,1 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0,1$ bo'lishi kerak.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad \text{Demak,}$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0,74.$$

Bunda $S \approx 0,7; 0,1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o'zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

Absolyut va shartli yaqinlashish.

3-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

4-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

Misol. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$q = \frac{1}{3}$$

bu qator maxraji $\frac{1}{3}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'lib yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\text{Misol. } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

Mustaqil yechish uchun misollar

$$1. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.}$$

$$2. \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.}$$

$$3. \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishini tekshiring.}$$

$$4. \quad 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishini tekshiring.}$$

$$5. \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad \text{qator yaqinlashishini tekshiring.}$$

41-mavzu. Funktsional va darajali qatorlar.

Funksional qatorlar haqida tushunchalar.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin.

$$1\text{-ta'rif. } u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

ifodaga funksional qator deyiladi. (1) da $x = x_0$ biror son bo'lsa, quyidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

(2) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va $x = x_0$ nuqtaga yaqinlashish nuqtasi deb ataladi.

$$\text{Misol. } 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (3)$$

funksional qator $x = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchidir, chunki

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Berilgan (3) funksional qator $x = 2$ nuqtada uzoqlashuvchi, chunki

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$$

sonli qator uzoqlashuvchi.

Funksional qator yaqinlashuvchi bo'lgan nuqtalar to'plamiga, uning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Darajali qatorlar va ularning xossalari.

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ o'zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffitsientlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|x - x_0| < R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x - x_0| > R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya'ni $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x = -x_0 \pm R$ nuqtalarda hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi

bo'lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo'ladi. $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervalga yaqinlashish intervali, ∞ ga darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R = 0$ yoki $R = \infty$ bo'lishi mumkin. $R = 0$ bo'lsa, darajali qator faqat $x = x_0$ nuqtada, $R = +\infty$ bo'lsa, butun sonlar o'qida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffitsientlari 0 dan farqli bo'lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

Misol.
$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish:
$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}.$$
 Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Demak, $-1 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

garmonik qator hosil bo'lib, u uzoqlashuvchidir. $x = -1$ bo'lsin, bu holda

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, u Leybnis belgisi shartlarini qanoatlantirgani uchun yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1 \leq x < 1$ dan iboratdir.

Misol.
$$(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ bo'lganligi uchun

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Demak, $-1 < x - 2 < 1$ yoki $1 < x < 3$ intervalda qator yaqinlashuvchi. Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x=3$ bo'lsin, bunda

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, integral belgidan foydalansak uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko'ring). $x=1$ bo'lsa,

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots$$

sonli qator hosil bo'lib, u absolyut yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1 \leq x \leq 3$ bo'ladi.

42-mavzu. Teylor va Makloren qatorlari. Funktsiyalarni darajali qatorlarga yoyish.

Teylor va Makloren qatorlari. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda qo'yidagi Teylor formulasi o'rinlidir:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + Q(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < Q < 1)$$

bu yerda

bo'lib, Lagranj

shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$a=0$ da Teylor formulasining xususiy holi - Makloren formulasi hosil bo'ladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad \text{bu erda}$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}[Qx]}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < Q < 1).$$

$y = f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo'lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

bo'lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \text{ va}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

qatorlar hosil bo'ladi. Bularning birinchisi Teylor qatori, ikkinchisiga Makloren qatori deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ bo'ladigan qiymatlarida $f(x)$ ga yaqinlashadi.

A nuqtani o'z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $|f^{(n)}(x)| < M$, (M biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

bo'ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

Ayrim funksiylarni darajali qatorga yoyamiz.

1) $f(x) = e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x, \dots \quad x=0 \quad \text{deb}$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

Bularni Makloren qatoriga qo'yib,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x=1$ desak,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

bo'lib, e soni qator yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x) = \sin x$. Istalgan x uchun

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \dots$$

Bundan

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

bo'lib, bularni Makloren qatoriga qo'ysak,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

hosil bo'ladi.

Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty < x < +\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

qator hosil bo'ladi, bu $f(x) = \cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo'ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x) = (1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \dots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga binomial qator deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) $f(x) = \ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

Misol. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ funksiyaning x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

bo'ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos \sqrt{x}$ funksiya $x < 0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos \sqrt{x}$ funksiyaga $0 \leq x < +\infty$ da yaqinlashadi.

Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari. Bir necha misollar qaraymiz.

Misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^\circ$ ni 0,001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 - \dots$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10} = 0,31416; \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0,09870; \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0,00974.$$

va $\frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0,0001$ bo'lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24}; \text{ yoki } \cos 18^\circ \approx 0,9511.$$

Misol. $\sqrt[5]{1,1}$ ni 0,0001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1,1} = (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1,1} &= (1 + 0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1)}{2!} 0,01 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1) \cdot (\frac{1}{5} - 2)}{3!} 0,001 + \\ &+ \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \dots \end{aligned}$$

bo'ladi. To'rtinchi had $0,000048 < 0,0001$ bo'lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1,1} \approx 1 + 0,02 - 0,0008 = 1,0192.$$

Misol. $\sqrt[3]{130}$ ni 0,001 aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $5^3 = 125$ ga eng yaqin butun sonning kubi bo'lganligi uchun $130 = 5^3 + 5$ deb olish qo'lay bo'lib,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= \sqrt[3]{5^3 + 5} = \sqrt[3]{5^3 \left(1 + \frac{1}{25}\right)} = 5 \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)}{2!} 0,0016 + \right. \\ &+ \left. \frac{(\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1) \cdot (\frac{1}{3} - 2))}{3!} 0,000064 + \dots\right) = 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 + \frac{1}{9} \cdot 0,0016 + 5 \cdot \frac{25}{81} \cdot 0,000032 - \dots \end{aligned}$$

oxirgi qatorda to'rtinchi had 0,001 dan kichik bo'lganligi uchun, birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 - 0,0009 \approx 5,066.$$

Misol. $\ln 1,04$ ni 0,0001 gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1 + 0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \dots, \quad \text{yoki}$$

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \dots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had $0,0001$ dan kichik bo'lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1,04 \approx 0,0392.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

$$1. \quad \frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots$$

funksional qatorning $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$2. \quad 1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots \quad \text{qator yaqinlashishini tekshiring.}$$

$$3. \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4-6 misollarda qatorning yaqinlashish intervalini aniqlang.

$$4. \quad (x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$$

$$5. \quad x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$$

$$6. \quad 5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$$

7. Ushbu funksiyalarni darajali qatorga yoying.

$$1) f(x) = 3^x; \quad 2) f(x) = e^{-2x}; \quad 3) f(x) = \cos^2 x.$$

43-mavzu. Funktsiyalarni Furiye qatoriga yoyish. Toq va juft funktsiyalarni Furiye qatoriga yoyish.

Toq va juft funktsiyalarni Furiye qatori. Bizga davri $T = 2\pi$ bo'lgan funksiya berilgan bo'lsin, ya'ni $f(x + 2\pi) = f(x)$. Berilgan funksiyaning Furiye qatori va koeffitsiyentlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$$

Quyida biz juft va toq funktsiyalarning Furiye qatori koeffitsientlarini hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

Agar $f(x)$ funksiya $[-a; a]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Ikkinchi integralda x ni $-x$ ga almashtirish bajarib, (5) ga qo'yamiz:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-x) d(-x) = - \int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx,$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx,$$

$f(x)$ funksiya toq bo'lsa, $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) - f(x)] dx = 0,$$

$f(x)$ funksiya juft bo'lsa, ya'ni $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]d(x) = 2 \cdot \int_0^a f(x)d(x)$$

Ikkita juft funksiyalarning yoki ikkita toq funksiyalarning ko'paytmasi juft funksiya, juft

va toq funksiyalarning ko'paytmasi toq funksiya ekanligini va (7) ni e'tiborga olgan holda juft va toq funksiyalarning Furiye qatori koefitsientlarini hisoblaymiz.

1) $f(x)$ funksiya davri $T = 2\pi$ bolgan, $[-\pi, \pi]$ da Dirixle shartlarini qanoatlantiradigan juft funksiya bo'lsin.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cdot \cos kx$$

Juft funksiya uchun Furiye qatori faqat kosinuslardan iborat, $b_k = 0$.

1) $f(x)$ funksiya davri $T = 2\pi$ bolgan, $[-\pi, \pi]$ da Dirixle shartlarini qanoatlantiradigan toq funksiya bo'lsin.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin kx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kx$$

Toq funksiya uchun Furiye qatori faqat sinuslardan iborat ekan, $a_0 = 0$, $a_k = 0$

Misol. Davri $T = 2\pi$ ga teng bo'lgan

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{agar } x \in (-\pi, 0) \\ x, & \text{agar } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

funksiyaning Fure qatoriga yoying.

Yechish. Juft funksiya $(-\pi, \pi)$ intervalda Dirixle shartlarini qanoatlantiradi (1-shakl).

1 – shakl.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \cdot \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot (\cos k\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot [(-1)^k - 1] =$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{k^2 \cdot \pi}, & k \text{ toq bo'lsa,} \\ 0, & k \text{ juft bo'lsa.} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$x=0, \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots \right)$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right)$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S,$$

$$\frac{3 \cdot S}{4} = \frac{\pi^2}{8}, \quad S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x$ funksiyaning Fure qatoriga yoying

2. $f(x)=\cos x$ funksiyaning $(0, \frac{\pi}{2})$ sinx bo'yicha Fure qatoriga yoying

43-mavzu. Davri 2I bo'lgan funksiyalar uchun Fur'e qatorlari. Fur'e qatorlarining tadbiqlari.

Ixtiyoriy davrli funksiya uchun Furiye qatori. Endi ixtiyoriy 2I davrli, Dirixle shartlarini qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyani qaraymiz.

$x = \frac{1}{\pi} t$ o'rniga qo'yish bizni funksiya olib keladi, bu funksiyani Furiye qatoriga yoyamiz:

$$f\left(\frac{1}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

bu yerda

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi} t\right) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi} t\right) \cdot \cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi} t\right) \cdot \sin ktdt$$

Qatorda va Furiye koefitsientlari formulalarida yangi t o'zgaruvchidan eski x o'zgaruvchiga qaytib va $t = \frac{\pi}{l} x$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$ ekanini hisobga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

bu yerda

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (2)$$

Koeffitsientlari (2) formulalari bilan aniqlanadigan (1) qator ixtiyoriy 2I davrli $f(x)$ funksiya uchun Furiye qatori deyiladi.

2I davrli juft funksiya uchun hamma $b_k = 0$ bo'ladi, demak Furiye qatori faqat kosinuslarni o'z ichiga oladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{k\pi x}{l}$$

bu yerda

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} dx$$

2l davrli toq funksiya uchun esa hamma $a_k = 0$ va $a_0 = 0$ bo'ladi, demak, Furiye qatori faqat sinuslarni o'z ichiga oladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

bu yerda

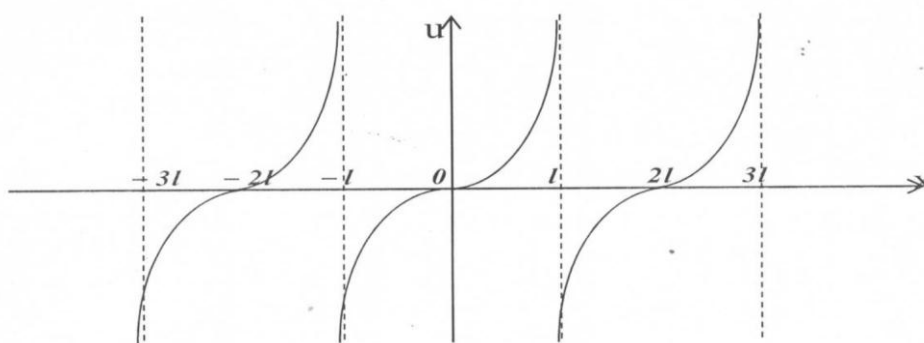
$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Ko'pincha $[0, l]$ kesmada (yarim davrda) berilgan $f(x)$ funksiyani sinuslar bo'yicha yoki kosinuslar bo'yicha yoyish masalasi talab etiladi.

$f(x)$ funksiyani kosinuslar bo'yicha qatorga yoyish uchun funksiya juftligicha kesmadan $[-l, 0]$ kesmaga davom ettiriladi. U holda «davom ettirilgan» juft funksiya uchun Furiye qatori faqat kosinuslarni o'z ichiga oladi. Agar $f(x)$ funksiyani qatoriga sinuslar bo'yicha yoyishni istasak, u holda funksiyani toqligicha $[0, l]$ kesmadan $[-l, 0]$ kesmagacha davom ettiramiz, bunda $f(x) = 0$ deb olishimiz kerak. «Davom ettirilgan» toq funksiya uchun Furiye qatori faqat sinuslarni o'z ichiga oladi.

Aslida kesmadan-kesmaga davom ettirishni amalga oshirmasa ham bo'ladi, chunki Furiye koeffitsientlarini hisoblash formulalaridan juft yoki toq funksiya holida $f(x)$ funksiyaning $[0, l]$ kesmadagi qiymatlari qatnashadi.

Misol. $f(x) = x^2$ funksiyani $[0, l]$ kesmada sinuslar bo'yicha qatorga yoying.



$f(x)$ funksiyaning $[-l, 0]$ kesmaga toq davom ettirish va undan keyingi davriy davom ettirish grafigi yuqoridagi 2-shaklda ko'rsatilgan.

$f(x)$ funksiya toq va Dirixle shartlarini qanoatlantiradi.

Demak,

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{k\pi} x^2 \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{2l^2}{(\pi k)^2} x \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{2l^3}{(\pi k)^3} x \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l \right) =$$

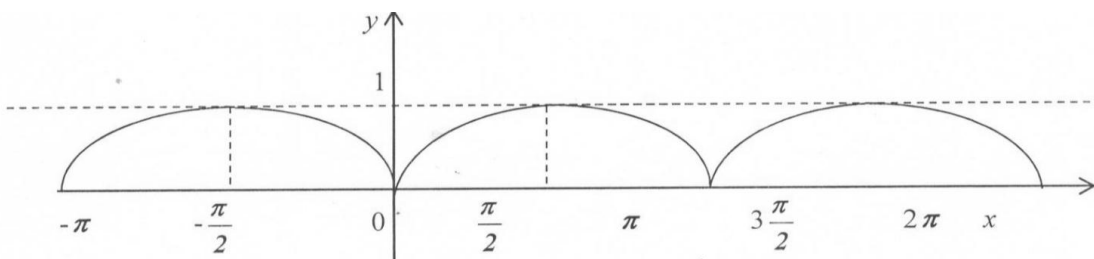
$$= \frac{2}{l} \left(-\frac{l^3}{k\pi} \cos k\pi + \frac{2l^3}{(\pi k)^3} (\cos \pi k - 1) \right) = \frac{2}{l} \left((-1)^{k+1} \frac{l^3}{k\pi} + \frac{2l^3}{(\pi k)^3} ((-1)^k - 1) \right)$$

Izlanayotgan yoyilma quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x) = \frac{2l^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{2}{(\pi k)^2} ((-1)^k - 1) \right)$$

Misol. $f(x) = \sin x$ funksiyani $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada kosinuslar bo'yicha qatorga yoying.

Yechish. Juft davom ettirish va undan keyingi davriy davom ettirish bo'yicha grafikni yasaymiz(3-shakl)



3-shakl.

Funksiya juft , shu sababli,

$$a_0 = 2 \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos 2x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2k+1} \cos(2k+1)x + \frac{1}{2k-1} \cos(2k-1)x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

Demak,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x + \dots \right)$$

$x = 0$ deb, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

Bundan.

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$$

Ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x$ funksiyani Fure qatoriga yoying

2. $f(x)=\cos x$ funksiyani $(0, \frac{\pi}{2})$ sinx bo'yicha Fure qatoriga yoying

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. To'rayev X., Azizov I., Otakulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. T.: 2009. 72-147 betlar.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.:1986.50-146 ст.
3. To'rayev X.T., Matematik mantik va diskret matematika. T.: 2003. 71-146 b.
4. Ismailov Sh., Axmedov O., Ro'ziboyev M. "Matematikadan olimpiada testlari", Toshkent-2008y., 17-29 betlar.
5. Р.Сменли. Перечислительная комбинаторика.М., Мир, 1990. 70-144 st.
6. А.Кофман.Введение в прикладную Комбинаторику. М., Наука, 1975. 51-165 st.
7. В.Липский. Комбинаторика для программистов. М., Мир, 1988. 73-148 st.
8. Н.Я.Виленкин. Комбинаторика. М., Наука, 1969. 71-145 st.
9. С.Х.Сирожиддинов, М.М.Маматов Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т.1980 йил.
10. В.Е.Гмурман- Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т.1977 йил.
11. В.Е.Гмурман -Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Т.1980 йил.
12. Л.Е.Майстров- Развитие понятия вероятностей. М. 1985 г.
13. М.Мансуров, А.Бердиёров, Р.Ҳамрақулова- Эҳтимоллар назарияси (маъруза матни) Жиззах-2006 йил
14. Б.Бобоназаров- Эҳтимоллар назарияси. Ж.2001 й.
15. Р.Ҳамрақулова- Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан амалий машғулот ўтказиш учун ўқув қўлланма Жиззах-2004 й.
16. Б.Бобоназаров, М.Мансуров- Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементларидан масалалар тўплами. Жиззах-2003 й.
17. Ш.Ш.Шоаҳмедов- Амалий математика унсурлари. Т.1997 й.
18. А.В.Нагаев- Элементы теории вероятностей и математической статистики. Т.1987 й.
19. www.mccmi.ru
20. www.intuit.ru
21. www.zn.uz—